Вариант № 1

1.1 Доказать следующее тождество:
$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$

1.2 Для множеств: A={-3,0,1,2,6,7,13,121 }, B={-2,0,1,4,5,6,21 }, C={1,2,3,5,6,61,76,451} найти
$A\bigcap(B\bigcap C);(A\bigcap B)\bigcap C;(A\backslash B)\bigcup C;(A\backslash C)\triangle(B\backslash C)$

1.3 Разбить на классы множество четных чисел, определив соответствующее отношение эквивалентности.

1.4 Показать, что множество целых чисел бесконечное.

1.5 Найти мощность множества нетривиальных, линейно-независимых решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda > -100, X(0) = X(1) = 0$.

1.6 Найти мощность множества точек на прямой находящихся друг от друга на расстоянии больше ϵ.

1.7 Изучить свойства множества $D = (0, 1] \cup \mathcal{N}$ (конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^1, |x-y|)$.

1.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \left(x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_3^2\right)^{1/2}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.

1.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n^2+1}{n^2};\ \frac{5+4n}{2n};\ \frac{(-1)^n}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

1.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = n^\alpha t^n(1-t), \qquad 0 \le t \le 1,$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

1.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = [\dot{x}(t)]^2.$$

1.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 \cos(t-s)x(s)ds.$$

1.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t < \dfrac{1}{2}, \quad -1 \le t \le -\dfrac{1}{2} \\ 1, & \dfrac{1}{2} \le t \le 1, \quad -\dfrac{1}{2} \le t < 0 \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

1.14 Является ли линейным пространством множество всех невырожденных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i,k = \overline{1,n},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\left\|\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right\|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\|\alpha a_{ik}\|$.

1.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

1.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на ось Oz.

Вариант № 2

2.1 Доказать следующее тождество:
$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$

2.2 Для множеств: A={-3,1,2,4,7,15,42 }, B={-3,0,4,7,15,22,111 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,45} найти
$A\bigcup(B\bigcup C);(A\bigcap B)\bigcup C;(A\setminus B)\bigcup C;(A\setminus C)\triangle(B\bigcap C)$

2.3 Разбить на классы множество чисел от 1 до 100, определив соответствующее отношение эквивалентности.

2.4 Показать, что множество чисел, имеющих остаток от деления на три равный единице, бесконечное.

2.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''+\lambda X=0, \lambda<10, X'(0)=X(1)=0$

2.6 Найти мощность множества точек на параболе $y=2x^2$.

2.7 Изучить свойства множества

$$D=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left]k,k+\frac{1}{2}\right]$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^1,|x-y|)$.

2.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\|=\max\left\{2|x_1|,|x_2|,\frac{1}{2}|x_3|\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

2.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\left(7^{-3n};\ \frac{-2n}{1+2n};\ \frac{n^2}{2+n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

2.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 0\le t\le 1-\dfrac{2}{n};\\ n^{\alpha}(1-t^2), & \dfrac{2}{n}<t\le 1\end{cases}$$

при $n\to\infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

2.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A}:\mathcal{C}^1([0,1])\to\mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t)=tx(t)+t^2.$$

2.12 Найти норму оператора $\widehat{A}:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t)=\int\limits_0^1 ts^2x(s)ds.$$

2.13 Для функции

$$f(t)=\begin{cases}-1, & \dfrac{2}{3}\le t\le 1,\\ 0, & 0\le|t|<\dfrac{2}{3},\\ 1, & -1\le t\le -\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n=2,\ n=4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t,\sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

2.14 Является ли линейным пространством множество всех упорядоченных наборов из n чисел

$$a = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad b = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n\}$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}$.

2.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{7}{3} & -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{2}{3} & -\dfrac{2}{3} & \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

2.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости xOy.

Вариант № 3

3.1 Доказать следующее тождество:
$(A\bigcap B)\bigcup(C\bigcap D)=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)\bigcap(A\bigcup D)\bigcap(B\bigcup D)$

3.2 Для множеств: A={-13,0,2,4,7,15,42 }, B={-3,0,4,7,15,17,21 }, C={-60,1,3,4,5,6,7,45} найти
$(A\bigcap B)\bigcup C$;$(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C)\bigcap A\bigcap B$;$(A\setminus B)\bigcap C$;$(A\bigcup C)\triangle(B\bigcap C)$

3.3 Разбить на классы множество комплексных чисел, определив соответствующее отношение эквивалентности.

3.4 Показать, что множество треугольников на плоскости бесконечное.

3.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + \lambda X = 0, X'(0) = X'(1) = 0$.

3.6 Найти мощность множества четных чисел делящихся на 3 нацело.

3.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2) : 1 \leq 3|x_1| + 2|x_2| \leq 3\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$.

3.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_2, \frac{\sqrt{10}}{4}\|\vec{x}\|_\infty\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.

3.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n}{n^3+1};\ \frac{3n}{4+3n};\ \frac{n+3}{1+n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

3.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha \cos \pi t, & 0 < t \leq \dfrac{1}{n^{2\alpha}}, \\ \sin t, & \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

3.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \dot{x}(t) + x(t).$$

3.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 x(\tau) \sin t \, d\tau.$$

3.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0, \\ 0, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

3.14 Является ли линейным пространством множество всех линейных функций

$$a = f(x_1, x_2), \quad b = g(x_1, x_2),$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha f(x_1, x_2)$.

3.15 Оператор $\widehat{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

3.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/2$.

Вариант № 4

4.1 Доказать следующее тождество:
A\(B⋃C)=(A\B)⋂(A\C)

4.2 Для множеств: A={-1,0,1,2,3,4,5 }, B={-3,-2,4,5,6,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти (A\B)⋂(A\C);(A ⋂ C) ⋂(B⋃C)△A ⋂B;(A\B)△C;(A⋂C)△(B⋂C)

4.3 Разбить на классы множество студентов вашей группы, определив соответствующее отношение эквивалентности.

4.4 Показать, что множество окружностей с центром в точке (1,1) бесконечное.

4.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, X'(0) = X'(\pi) = 0$

4.6 Найти мощность множества квадратных матриц второго порядка, элементами которых являются 0 и 1.

4.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n = \frac{1}{k5^n},\ k \in \mathcal{N} \right\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве ℓ_2.

4.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \left(6x_1^2 + x_2^2 + \frac{1}{6}x_3^2\right)^{1/2}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

4.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{-n}{n^2+2};\ \frac{n}{n+1};\ \frac{2n}{3-2n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

4.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \frac{n^\alpha t^3}{1+t^2n^2}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

4.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = 5t + \ddot{x}(t).$$

4.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 e^t x(s)ds.$$

4.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < \dfrac{1}{2}, \\ t+1, & \dfrac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

4.14 Является ли линейным пространством множество всех диагональных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i, k = \overline{1, n},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\|\alpha a_{ik}\|$.

4.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

4.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на ось Oy.

Вариант № 5

5.1 Доказать следующее тождество:
A\(B⋂C)=(A\B)⋃(A\C)
5.2 Для множеств: A={-1,0,1,2,3,4,5 }, B={-3,-2,4,5,6,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти
(A△B)⋃(A△C);(A ⋃ C) ⋂(B⋃C)△A ⋃B;(A\B)\C;(A⋃C)\(B⋂C)
5.3 Разбить на классы множество точек на кривой $x^2 - y^2 = 1$, определив соответствующее отношение эквивалентности.
5.4 Показать, что множество прямых, проходящих через точку (0,0) бесконечное.
5.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + \lambda X = 0, X'(0) = X(\pi) = 0$
5.6 Найти мощность множества состоящего из всех подмножеств множества $A = 1, 2, 4, 5$.
5.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2) : 1 \leq 2|x_1| + 3|x_2| \leq 3\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$.
5.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_2, \frac{3}{4}\|\vec{x}\|_\infty\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.
5.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{2n^2}{n^2+1};\ \frac{-n+1}{n};\ 5^{-n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.
5.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} \sin t, & \dfrac{1}{n^{2\alpha}} \leq t \leq -\dfrac{1}{n^\alpha}, \\ n^\alpha \sin \pi t, & \dfrac{1}{n^\alpha} < t \leq 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.
5.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \dot{x}\Big(\frac{1}{2}\Big)t^2.$$

5.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 \cos(t)x(s)\,ds.$$

5.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t \leq -\dfrac{1}{4}, \\ 0, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{4}, \\ 1, & \dfrac{1}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить $\|f(t)-S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

5.14 Является ли линейным пространством множество всех многочленов степени, меньшей или равной трем, от переменных x, y в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a+b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

5.15 Оператор $\widehat{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

5.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $x+z=0$

Вариант № 6

6.1 Доказать следующее тождество:
(A\(A\B)=(A⋂B)
6.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,0,3,2,1 }, B={-3,-1,0,4,5,6,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти (A△B)△(A△C);(A ⋂ C) ⋂(B⋃C)⋂A ⋃B;(A△B)\C; (A⋂B)
6.3 Разбить на классы множество непрерывных и дифференцируемых на [0,1] функций, определив соответствующее отношение эквивалентности.
6.4 Показать, что множество целых чисел, делящихся на 10 без остатка, бесконечное.
6.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + \lambda X = 0, \lambda < 50, X(0) = X(\pi) = 0$
6.6 Найти мощность множества целых чисел.
6.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2) : 1 \leq |x_1| + 2|x_2| \leq 3\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$.
6.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_2, \frac{4}{3}\|\vec{x}\|_2\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.
6.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{-2n}{n+8};\ \frac{n}{5+n};\ e^{-n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.
6.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = n^\alpha t e^{-nt^2}, \qquad 0 \leq t \leq 1,$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.
6.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = 2\ddot{x}(t) - \dot{x}(t).$$

6.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 te^s x(s), ds.$$

6.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0, \\ 2t, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.
Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.
6.14 Является ли линейным пространством множество всех прямоугольных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, n},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\|\alpha a_{ik}\|$.

6.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

6.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$.

Вариант № 7

7.1 Доказать следующее тождество:
A\B=A\(A⋃B))

7.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,0,1,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти (A△B)△(A△C);A\(A⋃B)); (A△B)\C; (A△B)

7.3 Разбить на классы множество университетов РФ, определив соответствующее отношение эквивалентности.

7.4 Показать, что множество точек на отрезке [0,1] бесконечное.

7.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - 5\lambda X = 0, \lambda > -50, X'(0) = X(\pi) = 0$

7.6 Найти мощность множества точек на кривой $y = x^4 - 1, x < 1$.

7.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2) : 1 \leq x_1^2 + (x_2 - 1) \leq 4\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|_1)$.

7.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \left(4x_1^2 + \frac{1}{9}x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

7.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n-1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n}{n+3};\ \frac{(-1)^n n}{n^2+1};\ \frac{3+5n}{5n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

7.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 - \dfrac{1}{n^{2\alpha}}, \\ n^{\alpha}(1-t)^2, & 1 - \dfrac{5}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

7.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \ddot{x}(t) - \dot{x}(t).$$

7.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 (t+s)x(s)\,ds.$$

7.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq |t| < \dfrac{1}{3}, \\ -1, & \dfrac{1}{3} \leq |t| \leq 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

7.14 Является ли линейным пространством множество всех упорядоченных наборов из n чисел

$$a = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \quad b = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\{x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n\}$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\{\alpha x_1, \alpha x_1, \ldots, \alpha x_n\}$.

7.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

7.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$.

Вариант № 8

8.1 Доказать следующее тождество:
A$\bigcap$(B\C)=(A$\bigcap$B)\C
8.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти (A\B)$\triangle$(A\C);A$\triangle$(A$\bigcup$B)); (A$\bigcup$B)\C; (A$\bigcap$B)
8.3 Разбить на классы множество комплексных корней уравнения $z^{100} = 1$, определив соответствующее отношение эквивалентности.
8.4 Показать, что множество точек в квадрате [0,1]×[0,1] бесконечное.
8.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''-3\lambda X = 0, \lambda > -10, X(0) = X'(3) = 0$
8.6 Найти мощность множества простых чисел.
8.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n = \frac{1}{k5^n} \right\}_{k=1}^{\infty}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное, односвязное) в метрическом пространстве ℓ_1).
8.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \frac{1}{2}\|\vec{x}\|_1 + 3\|\vec{x}\|_2$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.
8.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{-n}{n+5};\ \frac{n}{6+n};\ 2^n \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.
8.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 - \dfrac{1}{n}, \\ n^\alpha(1-t^2), & 1 - \dfrac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.
8.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = (t+1)x(t).$$

8.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 t \sin s x(s)\, ds.$$

8.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le |t| < \dfrac{1}{3}, \\ 2, & \dfrac{1}{3} \le |t| \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

8.14 Является ли линейным пространством множество всех многочленов третьей степени от переменной x, в котором сумма любых двух элементов определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

8.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

8.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x - 2z = 0$.

Вариант № 9

9.1 Доказать следующее тождество:
(A\B)\C=(A\C)\(B\C)
9.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти
(A\B)\C;A△(A⋂B)); (A\C)△(B\C); (A⋂B)
9.3 Разбить на классы множество точек в R^3, определив соответствующее отношение эквивалентности.
9.4 Показать, что множество векторов в R^3, перпендикулярных некоторой данной прямой, бесконечное.
9.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + 5\lambda X = 0, \lambda > 5, X(0) = X(\pi) = 0$
9.6 Найти мощность множества точек на окружности радиуса 1.
9.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2) : \exists f(x_1, x_2) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2} + \ln(x_1 x_2)\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$.

9.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\big\{|x_1|, 2|x_2|, 3|x_3|\big\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

9.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{2n+1};\ 3^{-n};\ \frac{2n^2+1}{n^2+3}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

9.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \le t \le 1 - \dfrac{1}{n}, \\ n^{\alpha} t^3, & 1 - \dfrac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

9.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \ddot{x}(t) - \dot{x}(t) + 3x(t).$$

9.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 t^2 s^2 x(s)\, ds.$$

9.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < 0, \\ -2t, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.
Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

9.14 Является ли линейным пространством множество всех векторов трехмерного пространства, координаты которых – целые числа; в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

9.15 Оператор $\widehat{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 2 & 5 & -2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

9.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости xOz.

Вариант № 10

10.1 Доказать следующее тождество:
A⋃B=A⋃(B\A)

10.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти (A△B)\C;A\(B\A); (A\C)\(B⋃C); (A\B)

10.3 Разбить на классы, определив соответствующее отношение эквивалентности, множество кривых на плоскости.

10.4 Показать, что множество векторов параллельных некоторой данной прямой в R^3 бесконечное.

10.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''+\lambda X = 0, \lambda < 25, X(0) = X'(\pi) = 0$

10.6 Найти мощность множества корней уравнения $sin(x) = 0$.

10.7 Изучить свойства множества

$$D = \{2^n\}_{n=1}^{10}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathcal{N}, |n - m|)$.

10.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \left(4x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + x_3^2\right)^{1/2}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

10.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n}{n^3+1};\ \frac{n^2}{n^2+1};\ \frac{5n}{1-5n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

10.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = n^{\alpha}(1 - t^2), \qquad 0 \le t \le 1,$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

10.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = t^2\ddot{x}(t).$$

10.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 t\cos tx(s)\,ds.$$

10.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < \dfrac{1}{4}, \\ 1, & \dfrac{1}{4} \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

10.14 Является ли линейным пространством множество всех векторов на плоскости, каждый из которых лежит на одной из осей, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

10.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{13}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

10.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на ось Ox.

Вариант № 11

11.1 Доказать следующее тождество:
$(A\bigcup B)\backslash C=(A\backslash C)\bigcup(B\backslash C)$

11.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти $(A\triangle B)\triangle C$; $A\backslash(B\backslash A)$; $(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcup C)$; $(A\backslash B)$

11.3 Разбить на классы множество непрерывных на [a,b] функций, определив соответствующее отношение эквивалентности.

11.4 Показать, что множество комплексных чисел бесконечное.

11.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''-\lambda X = 0, \lambda > 25, X(0) = X'(\pi) = 0$

11.6 Найти мощность множества корней уравнения $cos^2(x) = 0$.

11.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : 1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 4\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное, односвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty)$.

11.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = 5|x_1| + 3|x_2|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

11.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\Big(\frac{1}{1+\ln n};\ \frac{4n}{2n+1};\ \frac{1-n^2}{1+n^2}\Big)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

11.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = n^\alpha t^2 (1-t)^n, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

11.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = [\dot{x}(t)]^2 - \dot{x}(t).$$

11.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int_0^1 \sin(t-s)x(s)\,ds : C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}.$$

11.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -2 \leq t \leq -\dfrac{1}{4}, \\ 0, & 0 \leq t < \dfrac{1}{4}, \\ 1, & \dfrac{1}{4} \leq t \leq 2, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t/2)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos(k\pi t/2), \sin(k\pi t/2)\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

11.14 Является ли линейным пространством множество всех векторов трехмерного пространства, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $[a + b]$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

11.15 Оператор $\widehat{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

11.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $\sqrt{3}x+y=0$.

Вариант № 12

12.1 Доказать следующее тождество:
$A\backslash(B\backslash C)=(A\backslash B)\bigcup(A\bigcap C)$

12.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти $(A\bigcap B)\triangle C; A\backslash(B\triangle A)$; $(A\triangle C)\bigcup(B\backslash C)$; $(A\triangle B)$

12.3 Разбить на классы множество простых чисел, определив соответствующее отношение эквивалентности.

12.4 Показать, что множество прямых проходящих через некоторую данную точку бесконечное.

12.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda < 25, X'(0) = X'(\pi) = 0$

12.6 Найти мощность множества точек на прямой $y = 2x$

12.7 Изучить свойства множества
$$D = \{\vec{x} : \|\vec{x}\|_1 = 1\}$$
(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{y}\|_1)$.

12.8 Показать, что функция
$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_\infty, \frac{3}{5}\|\vec{x}\|_1\right\}$$
является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.

12.9 Для последовательности
$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty = \left\{\left(3^{-n};\ \frac{7n}{5-7n};\ \frac{2n+3}{n}\right)\right\}_{n=1}^\infty$$
убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

12.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$, где
$$x_n(t) = n^\alpha e^{-nt}, \qquad t \in [0,1],$$
при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

12.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где
$$\hat{A}x(t) = \ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) - 2x(t).$$

12.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где
$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 \cos tsx(s)\,ds.$$

12.13 Для функции
$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < 0, \\ t-1, & 0 < t \le 1, \end{cases}$$
найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^\infty$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^\infty$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

12.14 Является ли линейным пространством множество всех функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, принимающих положительные значения, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(t)g(t)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $f^\alpha(t)$.

12.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

12.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $z = 0$.

Вариант № 13

13.1 Доказать следующее тождество:
$A\setminus(B\bigcup C)=(A\setminus B)\setminus C$

13.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти $A\setminus(B\bigcup C)$;$A\setminus(B\bigcap A)$; $(A\triangle C)\setminus(B\triangle C)$; $(A\setminus B)\setminus(B\bigcup C)$

13.3 Разбить на классы множество матриц второго порядка, определив соответствующее отношение эквивалентности.

13.4 Показать, что множество эллипсов на плоскости с полуосями a=1, b=2 бесконечное.

13.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda < 30, X'(0) = X'(3) = 0$

13.6 Найти мощность множества прямых на плоскости проходящих через заданную точку.

13.7 Изучить свойства множества

$$D = \{x_n(t) : x_n(t) = 2t + n\}_{n=1}^{100}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное, односвязное) в метрическом пространстве $L^2[0,1]$.

13.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = 2|x_1| + \frac{1}{3}|x_2| + |x_3|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

13.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{-n}{n+1};\ \frac{n}{5+n};\ 2^{-n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

13.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = n^{\alpha}(1-t^2)^n t, \qquad t \in [0,1],$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

13.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = [x(t)]^3.$$

13.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 e^{-(t-s)^2} x(s)\, ds.$$

13.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le |t| < \dfrac{3}{4}, \\ -1, & \dfrac{3}{4} \le t \le 1, \\ 1, & -1 \le t \le -\dfrac{3}{4}, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

13.14 Является ли линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной степени, меньшей или равной n, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

13.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

13.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x - y = 0$.

Вариант № 14

14.1 Доказать следующее тождество:
$A\triangle B = B \triangle A$

14.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти $A\triangle(B\bigcup C); A\setminus(B\bigcap A); (A\bigcap C)\setminus(B\setminus C); (A\triangle B)\bigcup(B\bigcup C)$

14.3 Разбить на классы множество квадратных матриц, определив соответствующее отношение эквивалентности.

14.4 Показать, что множество кривых проходящих через две заданные точки бесконечное.

14.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - 2\lambda X = 0, \lambda > -30, X'(0) = X(3) = 0$

14.6 Найти мощность множества нечетных чисел делящихся на семь нацело.

14.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) : 0 \le x_1 \le 2, -2 \le x_2 \le 3, 0 < x_3 \le 4\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$.

14.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \left(4x_1^2 + x_2 + \frac{1}{4}x_3^2\right)^{1/2}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

14.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n-1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n^2}{4+n^2}; \ \frac{2^n+1}{1-2^n}; \ \frac{3}{3+2^n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

14.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 - \dfrac{\pi}{2n}, \\ n^\alpha \cos \pi t, & 1 - \dfrac{\pi}{2n} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

14.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = t\dot{x}(t).$$

14.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 \frac{1}{1+t^2} x(s)\, ds.$$

14.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le |t| < \dfrac{1}{3}, \\ 0, & \dfrac{1}{3} \le |t| \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

14.14 Является ли линейным пространством множество всех четных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(t)g(t)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha f(t)$.

14.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

14.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$.

Вариант № 15

15.1 Доказать следующее тождество:
A△(B△C)=(A△B)△C

15.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти A△(B△C);A\(B⋃C);A\(B⋂A); (A⋂C)⋂(B\C)

15.3 Разбить на классы множество чисел на отрезке [0,1], определив соответствующее отношение эквивалентности.

15.4 Показать, что множество точек $\mathbb{R}^3$, удовлетворяющих неравенству $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ бесконечное.

15.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda < 50, X(0) = X'(2) = 0$

15.6 Найти мощность множества комплексных корней уравнения $z^n = 1$.

15.7 Изучить свойства множества

$$D = \{x : 1 < |x| \leq 2\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное, односвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^1, |x - y|)$.

15.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_\infty, \frac{2}{3}\|\vec{x}\|_1\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

15.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{3n}{7+3n};\ \frac{1}{n+5};\ \frac{(-1)^n}{n^2+1}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

15.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \frac{n^\alpha}{1+nt}, \qquad t \in [0,1],$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

15.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = t[\dot{x}(t)]^2.$$

15.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 t^3 x(s)\,ds.$$

15.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < 0, \\ t, & 0 \leq t \leq 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

15.14 Является ли линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной степени n, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

15.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

15.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости yOz.

Вариант № 16

16.1 Доказать следующее тождество:
$A\bigcap(B\triangle C)=(A\bigcap B)\triangle(A\bigcap C)$
16.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти $A\bigcap(B\triangle C)$;$A\triangle(B\bigcup C)$;$A\bigcup(B\bigcap A)$; $(A\bigcap C)\triangle(B\setminus C)$
16.3 Разбить на классы множество $\{1,2,3,4,5\}$, определив соответствующее отношение эквивалентности.
16.4 Показать, что множество точек на окружности радиуса 1 бесконечное.
16.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, X'(0) = X'(2) = 0$
16.6 Найти мощность множества комплексных чисел модуль которых равен 1.
16.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{(x_1, x_2) : \exists f(x_1, x_2) = \arcsin\frac{x_1}{x_2}\right\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное, односвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_1)$.

16.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = 4|x_1| + 2|x_2|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

16.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n-1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{n+1}{2-n};\ \frac{2n}{n+1};\ \frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

16.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = n^{\alpha}e^{-nt^2}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

16.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = [x(t)]^4.$$

16.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int_0^1 (t^2+1)x(s)\,ds.$$

16.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < 0, \\ t+1, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.
Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

16.14 Является ли линейным пространством множество всех действительных чисел, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

16.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & ? & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

16.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$.

Вариант № 17

17.1 Доказать следующее тождество:
A△(A△B)=B

17.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти A△(A△B);A△(B\C);A⋃(B△A); (A⋂C)⋃(B\C)

17.3 Разбить на классы множество иррациональных чисел , определив соответствующее отношение эквивалентности.

17.4 Показать, что множество целых чисел, делящихся на девять без остатка, бесконечное.

17.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + \lambda X = 0, X'(0) = X(2) = 0$

17.6 Найти мощность множества чисел на отрезке [-1;-0.99999].

17.7 Изучить свойства множества

$$D = \{x(t) : x(t) = t^2 + a,\ a \in [0, 10]\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(C_{[0,1]}, \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)|)$.

17.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_2, \frac{\sqrt{5}}{2}\|\vec{x}\|_\infty\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

17.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\Big(\frac{(-1)^n}{n};\ \frac{2n}{7+2n};\ \frac{3-n^2}{n^2}\Big)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

17.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha(1-t^2)t, & 0 \le t < \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \le t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

17.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \dot{x}(t) + tx(t).$$

17.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 tsx(s)\,ds.$$

17.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ -t-1, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

17.14 Является ли линейным пространством множество всех непрерывных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[0, 1]$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(t) + g(t)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha f(t)$.

17.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

17.16. Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y - z = 0$.

Вариант № 18

18.1 Доказать следующее тождество:
$A\bigcup B = A\triangle B\triangle(A\bigcap B)$

18.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти $A\bigcap(A\triangle B)$;$A\triangle(B\triangle C)$;$A\bigcup(B\bigcup A)$; $(A\setminus C)\bigcap(B\setminus C)$

18.3 Разбить на классы множество делителей числа 2007, определив соответствующее отношение эквивалентности.

18.4 Показать, что множество точек на прямой бесконечное.

18.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + 2\lambda X = 0, \lambda < 100 X(-1) = X(2) = 0$

18.6 Найти мощность множества натуральных чисел делящихся на 17 нацело.

18.7 Изучить свойства множества

$$D = \{(x_1, x_2) : \exists f(x_1, x_2) = \arccos\frac{x_1 + x_2}{2}\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_2)$.

18.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_1, \|\vec{x}\|_\infty\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

18.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n-1}^{\infty} = \left\{\Big(\frac{(-1)^n}{n};\ \frac{5+2n}{3-2n};\ \frac{5+6n}{3n}\Big)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

18.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^{2\alpha}t^2, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n^\alpha}, \\ \sin t, & \dfrac{1}{n^\alpha} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

18.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = x(t) + \dot{x}(t) - \ddot{x}(t).$$

18.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 (t+s)x(s)\,ds.$$

18.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le |t| \le \dfrac{3}{4}, \\ 1, & \dfrac{3}{4} < |t| \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

18.14 Является ли линейным пространством множество всех дифференцируемых функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(t) + g(t)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha f(t)$.

18.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

18.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$.

Вариант № 19

19.1 Доказать следующее тождество:
A\B=A△(A⋂B)

19.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти A\(A△B);A\(B⋃C);A△(A⋂B); (A△C)⋃(B\C)

19.3 Разбить на классы множество корней уравнения $\sin x = 1$, определив соответствующее отношение эквивалентности.

19.4 Показать, что множество четных чисел, делящихся на 17 без остатка, бесконечное.

19.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + 2\lambda X = 0, \lambda < 100X'(-1) = X'(2) = 0$

19.6 Найти мощность множества комплексных корней уравнения /cos z+sinz=z.

19.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n = \frac{1}{n+k} \right\}_{k=1}^{10}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(m, d(x,y) = \sup\limits_{1\le n<\infty} \{|x_n - y_n\})$.

19.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = 3|x_1| + \frac{1}{2}|x_2| + |x_3|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

19.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n-1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{-2n}{3+2n};\ \frac{1}{n+3};\ \frac{4n}{2n+1} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

19.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha t, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ t^2, & \dfrac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

19.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = 3\ddot{x}(t).$$

19.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 (t-s)x(s)\,ds.$$

19.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t < 0, \\ 2t, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

19.14 Является ли линейным пространством множество всех нечетных функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, заданных на отрезке $[-1, +1]$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(t) + g(t)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha f(t)$.

19.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

19.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y + z = 0$.

Вариант № 20

20.1 Доказать следующее тождество:
A⋃B=(A△B)⋃(A⋂B)
20.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти
A△(A\B);A△(B⋃C);A⋃(A⋂B); (A△C)\(B⋃C)
20.3 Разбить на классы множество треугольников на плоскости, определив соответствующее отношение эквивалентности.
20.4 Показать, что множество точек на сфере радиуса 1 бесконечное.
20.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda > -10 X'(-1) = X(2) = 0$
20.6 Найти мощность множества точек в круге радиуса 1.
20.7 Изучить свойства множества $D = (0, \infty)$ (конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве

$$\Big(\mathbb{R}^1, d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\Big).$$

20.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\frac{3}{4}\|\vec{x}\|_2, \|\vec{x}\|_\infty\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.
20.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^\infty = \left\{\Big(2^{-n};\ \frac{n^2}{n^2+2};\ \frac{2n}{5-2n}\Big)\right\}_{n=1}^\infty$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.
20.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^\infty$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^{\alpha+2}t, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n^2}, \\ t^3, & \dfrac{1}{n^2} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.
20.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \dot{x}(t)x(t).$$

20.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int_0^1 t(s^2+1)x(s)\,ds.$$

20.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < 0, \\ -t+1, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^\infty$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^\infty$.
Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.
20.14 Является ли линейным пространством множество всех сходящихся последовательностей

$$a = \{u_n\}, \quad b = \{v_n\},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\{u_n v_n\}$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\{\alpha u_n\}$.

20.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

20.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$.

Вариант № 21

21.1 Доказать следующее тождество:
A⋃(B⋂C)=(A⋃B)⋂(A⋃C)
21.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти
(A\B)⋂(A⋃C);A△(B△C);A⋃(A⋃B); (A△C)\(B⋃C)
21.3 Разбить на классы множество кривых второго порядка, определив соответствующее отношение эквивалентности.
21.4 Показать, что множество нечетных чисел бесконечное.
21.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - 4\lambda X = 0, \lambda > -150, X(1) = X'(2) = 0$
$X'(-\pi) = X(2\pi) = 0$
21.6 Найти мощность множества

$$D = \left\{ x : \exists f(x) = \ln \frac{x-1}{x} \right\}$$

21.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : \exists f(x_1, x_2) = \ln \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \right\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $(\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty)$.
21.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{ \frac{1}{2}|x_1|, 4|x_2|, |x_3| \right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.
21.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{1}{n};\ \frac{(-1)^n}{n+1};\ \frac{-2n}{n+2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.
21.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < \dfrac{1}{2n}, \\ n^\alpha, & \dfrac{1}{2n} \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \frac{1}{n} \le t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.
21.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = e^t x^3(t).$$

21.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 e^{t-s} x(s)\, ds.$$

21.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t < 0, \\ t, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

21.14 Является ли линейным пространством множество всех векторов, являющихся линейными комбинациями векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a+b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

21.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

21.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y = 0$.

Вариант № 22

22.1 Доказать следующее тождество:
A⋂(B⋃C)=(A⋂B)⋃(A⋂C)
22.2 Для множеств: A={-7,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти (A⋂B)⋃(A⋂C);(A△B)⋂(A\C);A\(B△C); (A⋃C)\(B⋃C)
22.3 Разбить на классы множество

$$D = \left\{ x : \exists f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x}{x+1}} \right\}$$

, определив соответствующее отношение эквивалентности.
22.4 Показать, что множество простых чисел бесконечное.
22.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + \lambda X = 0, X'(1) = X(2) = 0$
22.6 Найти мощность множества чисел делящихся нацело на сумму своих цифр.
22.7 Изучить свойства множества $D = \{2n\}_{n=1}^{\infty}$ (конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве

$$\left(\mathcal{N}, d(n,m) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{n+m}, & n \neq m, \\ 0, & n = m \end{cases} \right).$$

22.8 Показать, что функция $\|x\| = |100x|$ является нормой в пространстве $\mathbb{R}^1$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.
22.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{2n+3}{n};\ 4^{-n};\ \frac{3}{n^2+2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_{\infty}$.
22.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^{\alpha} \sin \pi n t, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < t \leq 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.
22.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = [\dot{x}(t)]^2 + \ddot{x}(t).$$

22.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} x(s)\, ds.$$

22.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \leq t < \dfrac{1}{2}, \quad 0 \leq t < -\dfrac{1}{2}, \\ -1, & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1, \quad -\dfrac{1}{2} \leq t < 0, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:
а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;
б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

22.14 Является ли линейным пространством множество всех симметричных матриц

$$a = \|a_{ik}\| \ (a_{ki} = a_{ik}), \quad b = \|b_{ik}\| \ (b_{ki} = b_{ik}), \quad i, k = \overline{1, n},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\|\alpha a_{ik}\|$.

22.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

22.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $y = \sqrt{3}x$.

Вариант № 23

23.1

23.2 Для множеств: A={-1,0,1,2,3,4,5,6 }, B={-2,-1,0,1,2 }, C={1,2,3,4,5,6,7,14} найти (A\B)⋃(A⋂C);A△(B⋂C);A⋃(A⋃B); (A△C)\(B⋂C)

23.3 Разбить на классы множество прямых проходящих через точку (1,0), определив соответствующее отношение эквивалентности.

23.4 Показать, что множество чисел, лежащих в интервале (a, b), a < b бесконечное.

23.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + 4\lambda X = 0, \lambda > 150, X'(\pi) = X'(2\pi) = 0$

23.6 Найти мощность множества точек на плоскости XOY у которых координаты-целые числа.

23.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{ x(t) : x(t) = \frac{t}{n},\ n \in \mathcal{N} \right\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $L_1[0,1]$.

23.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{ 3|x_1|, \frac{1}{3}|x_2| \right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

23.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{1}{n+3};\ \frac{(-1)^n}{n^2};\ \frac{2n^2}{n^2+1} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

23.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^{\alpha+2}t^2, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

23.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = 5\ddot{x}(t) - x(t).$$

23.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 (t+1)^2 x(s)\, ds.$$

23.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le |t| < \dfrac{2}{3}, \\ 1, & \dfrac{2}{3} \le |t| \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

23.14 Является ли линейным пространством множество всех векторов, лежащих на одной оси, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a + b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

23.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

23.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$.

Вариант № 24

24.1

24.2 Для множеств: A={0,1,2,3,4,5,6 }, B={-2,-1,0,1,2 }, C={-1,1,2,3,4,5,6,7,14} найти
$(A\setminus B)\bigcap(A\bigcap C)$;$A\triangle(B\bigcap C)$;$A\bigcap(A\bigcap B)$; $(A\triangle C)\setminus(B\bigcup C)$

24.3 Разбить на классы множество векторов перпендикулярных некоторой плоскости, определив соответствующее отношение эквивалентности.

24.4 Показать, что множество целых чисел, делящихся на девять без остатка, бесконечное.

24.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''+\lambda X = 0, \lambda > \pi, X(\pi) = X(2\pi) = 0$

24.6 Найти мощность множества

$$D = \left\{\frac{1}{k5^k}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

24.7 Изучить свойства множества $D =]0, 1]$ (конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве

$$\left(\mathbb{R}^1, d(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{1+(x-y)^2}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}\right)$$

24.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = 2|x_1| + |x_2| + \frac{1}{2}|x_3|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.

24.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(\frac{1}{3n};\ 2^{-n};\ \frac{3n+2n^2}{1+n^2}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

24.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha \cos \pi n t, & |t| \leq \dfrac{1}{2n}, \\ 0, & \dfrac{1}{2n} < |t| \leq 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

24.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = 5\dot{x}(t).$$

24.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds.$$

24.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \dfrac{3}{4}, \quad -1 \leq t < -\dfrac{3}{4}, \\ -1, & \dfrac{3}{4} \leq t \leq 1, \quad -\dfrac{3}{4} \leq t < 0, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

24.14 Является ли линейным пространством множество всех положительных чисел, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как ab, а произведение любого элемента a на любое число α – как a^α.

24.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

24.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$.

Вариант № 25

25.1

25.2 Для множеств: A={-2,-1,0,1,2,3,4,5 }, B={-2,-1,0,1,2 }, C={-2,-1,1,2,3,4,5,6,7,14} найти (A$\bigcap$ B)$\bigcup$C ;(A $\bigcup$ C) $\bigcap$(B$\bigcup$C)$\bigcap$A $\bigcap$B;(A\B)$\bigcap$C;(A$\bigcup$C)$\triangle$(B$\bigcap$C)

25.3 Разбить на классы множество окружностей с центром в начале координат, определив соответствующее отношение эквивалентности.

25.4 Показать, что множество чисел имеющих среди своих делителей сумму цифр числа, бесконечное.

25.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''+\lambda X = 0, \lambda > \pi, X(\pi) = X(2\pi) = 0$

25.6 Найти мощность множества точек на плоскости отстоящих от точки (1,1) на растоянии не меньшим единицы.

25.7 Изучить свойства множества

$$D = \Big\{x_1, x_2, x_3) : \ 1 \le x_1 \le 2, \forall x_2, \forall x_3\Big\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $\mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{y}\|_\infty$.

25.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\Big\{\|\vec{x}\|_2, \frac{5}{4}\|\vec{x}\|_\infty\Big\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

25.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\Big(\frac{1}{n^2+1};\ \frac{2n}{1+2n};\ \frac{2n+3}{n}\Big)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

25.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} -n^{\alpha+1}\Big(t - \dfrac{1}{n}\Big), & |t| \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} < |t| \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

25.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = x(0)(2t+1).$$

25.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 \sin tsx(s)\, ds.$$

25.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ -2t, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

25.14 Является ли линейным пространством множество всех дифференцируемых функций $a = f(t)$, $b = g(t)$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $f(t)g(t)$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha f(t)$.

25.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

25.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость yOz.

Вариант № 26

26.1

26.2 Для множеств: A={-6,-5,-4,0,3,2,1 }, B={-2,-1,0,4,5,6,7,21 }, C={-6,1,4,5,6,7,14} найти (A△B)△(A△C);(A $\bigcup$ C) $\bigcap$(B$\bigcup$C)$\bigcap$A $\bigcup$B;(A△B)\C; (A$\bigcap$B)

26.3 Разбить на классы множество точек на кривой ($x = \sin t, y = \cos t, t \subset [0, 2\pi]$), определив соответствующее отношение эквивалентности.

26.4 Показать, что множество корней уравнения $\cos x + 2\sin 2x = 0.5$, бесконечное.

26.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda < \pi, X(-\pi) = X'(0) = 0$

26.6 Найти мощность множества корней уравнения $\sin^2 x - \cos^2 x = 1$

26.7 Изучить свойства множества

$$D = \left\{ \frac{n}{2n+3} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $\mathbb{R}^1, |x - y|$.

26.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = 3|x_1| + 4|x_2|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

26.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \left(\frac{1}{\ln n};\ \frac{2n+3}{n};\ \frac{2-n^2}{3+n^2} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

26.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha t, & 0 \le t \le \dfrac{1}{n}, \\ \operatorname{tg} t, & \dfrac{1}{n} < t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

26.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t).$$

26.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 (1+2t)sx(s)\,ds.$$

26.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ t+2, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

26.14 Является ли линейным пространством множество всех квадратных матриц

$$a = \|a_{ik}\|, \quad b = \|b_{ik}\|, \quad i, k = \overline{1, n},$$

в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\|a_{ik} + b_{ik}\|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\|\alpha a_{ik}\|$.

26.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

26.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x + z = 0$.

Вариант № 27

27.1

27.2 Для множеств: A={-6,-5,-4,-2 }, B={-6,-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,-5,-4,1,2,3,4,5,6,7,14} найти A△(B△C);A\(B⋂C);A\(B⋂A); (A⋂C)⋃(B\C)

27.3 Разбить на классы множество целых чисел делящихся на семь без остатка, определив соответствующее отношение эквивалентности.

27.4 Показать, что множество чисел составленных из цифр 0 и 1, бесконечное.

27.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, -100 < \lambda < 0, X'(0) = X'(\pi) = 0$

27.6 Найти мощность множества состоящего из всех двузначных чисел которые можно составить из цифр 1,2,3 и 4.

27.7 Изучить свойства множества

$$\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $G, |x-y|$.

27.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max\left\{\|\vec{x}\|_2, \frac{2}{\sqrt{3}}\|\vec{x}\|_\infty\right\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

27.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(5e^{-n};\ \frac{2n^2+5}{n^2};\ \frac{2n}{5-2n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

27.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} 2n^{\alpha+1}t, & 0 \le t \le \dfrac{1}{2n}, \\ -2n^{\alpha+1}\Big(t - \dfrac{1}{n}\Big), & \dfrac{1}{2n} \le t < \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le t \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

27.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = x(0) - 3\dot{x}(0).$$

27.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \int\limits_0^1 \cos(2s-t)x(s)\,ds.$$

27.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \le t \le -\dfrac{1}{2}, \\ 0, & -\dfrac{1}{2} < t \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \dfrac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

27.14 Является ли линейным пространством множество всех векторов, лежащих на одной оси, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $a+b$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\alpha|a|$.

27.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

27.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора поворота относительно оси Oz в положительном направлении на угол $\pi/4$.

Вариант № 28

28.1

28.2 Для множеств: A={0,1,2,3,4,5,6 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,2,3,4,5,6,7,14} найти $A\bigcup(A\triangle B);A\triangle(B\triangle C);A\bigcap(B\bigcup A);\ (A\backslash C)\bigcup(B\backslash C)$

28.3 Разбить на классы множество прямых проходящих через точку (1,0), определив соответствующее отношение эквивалентности.

28.4 Показать, что множество чисел составленных из цифр 0 и 1, бесконечное.

28.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X''-2\lambda X=0, \lambda<0, X(0)=X(\pi)=0$

28.6 Найти мощность множества симметричных матриц второго порядка.

28.7 Изучить свойства множества

$$D=\Big\{(x_1,x_2,x_3):\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\Big\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $\mathbb{R}^3, \|\vec{x}-\vec{y}\|_1$.

28.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\|=\max\Big\{\|\vec{x}\|_2, \frac{5}{4}\|\vec{x}\|_\infty\Big\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый <шар> с центром в <нуле>. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих <шару>, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих <шару>.

28.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}=\left\{\left(3e^{-n};\ \frac{2n^2+5}{n^2};\ \frac{2n-4}{5-2n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

28.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t)=\begin{cases} n^{\alpha+1}t, & 0\le t\le \dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n}<t\le 1,\end{cases}$$

при $n\to\infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

28.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A}:\mathcal{C}^1([0,1])\to\mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t)=t^2x(t).$$

28.12 Найти норму оператора $\widehat{A}:\mathcal{C}([0,1])\to\mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t)=\int\limits_0^1 ts^3x(s)\,ds.$$

28.13 Для функции

$$f(t)=\begin{cases} 1, & 0\le |t|<\dfrac{2}{3},\\ -1, & \dfrac{2}{3}\le |t|\le 1,\end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n=2,\ n=4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t)-S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

28.14 Является ли линейным пространством множество всех отрицательных чисел, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $|a|\,|b|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $|a|^{\alpha}$.

28.15 Оператор $\widehat{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

28.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора поворота относительно оси Ox в положительном направлении на угол $\pi/2$.

Вариант № 29

29.1

29.2 Для множеств: A={-2,0,2,3,4,5,6,7,8 }, B={-2,-1,0,1,2,3,7,8 }, C={-2,1,2,4,5,6,7,14} найти (A\B)⋂(A⋃C);A⋂(B△C);A⋃(A⋃B); (A△C)\(B⋃C)

29.3 Разбить на классы множество чисел Фибоначчи 1,2,3,5,8,...., определив соответствующее отношение эквивалентности.

29.4 Показать, что множество точек на плоскости $x + y = 1$, бесконечное.

29.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' + 3\lambda X = 0, X'(-3) = X'(3) = 0$.

29.6 Найти мощность множества матриц второго порядка для которых справедливо $A^{-1} = A$.

29.7 Изучить свойства множества

$$D = \Big\{(x_1, x_2) : \ 4 < x_1^2 + x_2^2 \le 9\Big\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $\mathbb{R}^2, \|\vec{x} - \vec{y}\|_1$.

29.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max_{1\le j\le 3} |x_j|$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^3$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.

29.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \bigg\{\Big(\frac{7n-5}{5-14n};\ 3^{-n};\ \frac{2n^2-1}{3n^2+n}\Big)\bigg\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

29.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^{\alpha}(1 - e^{-nt}, & |t| \le \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \dfrac{1}{n} \le |t| \le 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

29.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = t\ddot{x}(t) + e^t.$$

29.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\pi} x(s)\sin(3s - 2t)\, ds.$$

29.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 0, & -1 \le t \le -\dfrac{1}{2}, \\ -1, & -\dfrac{1}{2} < t \le \dfrac{1}{2}, \\ 1, & \dfrac{1}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ $(n = 2,\ n = 4)$ ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t)-S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

29.14 Является ли линейным пространством множество всех диагональных матриц

$$a=\|a_{ik}\|,\quad b=\|b_{ik}\|$$

размера $n\times n$, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как $\left\|\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\right\|$, а произведение любого элемента a на любое число α – как $\|\alpha a_{ik}\|$.

29.15 Оператор $\widehat{A}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{5}{3} & -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{13}{3} \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

29.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора проектирования на плоскость $x+y=0$.

Вариант № 30

30.1

30.2 Для множеств: A={-7,-6,-5,-4,-2,0,2,3,4 }, B={-1,0,1,2,3,7,21 }, C={-6,1,3,4,5,6,7,14} найти (A\B)\C;A△(A⋃B)); (A\C)△(B\C); (A⋂B).

30.3 Разбить на классы множество точек на плоскости XOY, определив соответствующее отношение эквивалентности.

30.4 Показать, что множество нечетных чисел делящихся на 17 без остатка, бесконечное.

30.5 Найти мощность множества нетривиальных решений задачи $X'' - \lambda X = 0, \lambda > -100, X(0) = X'(3) = 0$.

30.6 Найти мощность множества точек на кривой $y = x^2 + 1$ координаты которых целые числа.

30.7 Изучить свойства множества

$$D = \Big\{(x_1, x_2, x_3) : \ 4 \le x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \le 9\Big\}$$

(конечное, бесконечное; ограниченное, неограниченное; открытое, замкнутое; связное, несвязное) в метрическом пространстве $\mathbb{R}^3, \|\vec{x} - \vec{y}\|_1$.

30.8 Показать, что функция

$$\|\vec{x}\| = \max_{1 \le j \le 2} \Big\{|x_j|, |x_j|^2\Big\}$$

является нормой в пространстве $\mathbb{R}^2$. Изобразить единичный замкнутый $<$шар$>$ с центром в $<$нуле$>$. Привести примеры элементов пространства, принадлежащих $<$шару$>$, а также примеры элементов пространства, не принадлежащих $<$шару$>$.

30.9 Для последовательности

$$\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty} = \Big\{\Big(\frac{3n^3 - 5}{n + 2n^2 - n^3};\ 2^{-n};\ \frac{5n - 7}{8n^2 - 2n + 1}\Big)\Big\}_{n=1}^{\infty}$$

убедиться в эквивалентности покоординатной сходимости и сходимости по каждой из норм $\|\vec{x}\|_1$, $\|\vec{x}\|_2$, $\|\vec{x}\|_\infty$.

30.10 Установить, для каких значений параметра α последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, где

$$x_n(t) = \begin{cases} n^\alpha t^2, & |t| \le \dfrac{1}{n^2}, \\ 0, & \dfrac{1}{n^2} < |t| < 1, \end{cases}$$

при $n \to \infty$ сходится равномерно, в среднеквадратичном, в среднем к предельной функции.

30.11 Исследовать свойства (линейность, ограниченность, непрерывность) оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}^2([0,1]) \to \mathcal{C}^1([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = t\ddot{x}(t) - e^t \dot{x}(t).$$

30.12 Найти норму оператора $\widehat{A} : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$, где

$$\hat{A}x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^\pi x(s)\cos(3s - 2t)\,ds.$$

30.13 Для функции

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -1 \le t < 0, \\ -t + 1, & 0 \le t \le 1, \end{cases}$$

найти частичные суммы $S_n(t)$ ($n = 2$, $n = 4$) ряда Фурье:

а) по ОС многочленов Лежандра $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$;

б) по ОС тригонометрических функций $\{\cos k\pi t, \sin k\pi t\}_{k=0}^{\infty}$.

Изобразить графики функций $f(t)$ и $S_n(t)$, вычислить норму разности $\|f(t) - S_n(t)\|_{L_2}$ для всех случаев.

30.14 Является ли линейным пространством множество всех действительных чисел, в котором сумма любых двух элементов a и b определена как ab, а произведение любого элемента a на любое число α – как αa.

30.15 Оператор $\widehat{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задан матрицей

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найти собственные значения, собственные векторы и норму оператора.

30.16 Доказать линейность, найти матрицу, область значений и ядро оператора поворота в положительном направлении относительно оси Oy на угол $\pi/2$.