Метрические и нормированные пространства

А. Л. Лисок, Р. О. Резаев,
А. Ю. Трифонов, А. В. Шаповалов

Функциональный анализ

Лекция

Фундаментальным в анализе является предельный переход (сходимость). Для одних и тех же математических объектов в различных задачах вводятся разные понятия предела. Например, для последовательности функций $f_n(x)$ вводятся поточечная сходимость, равномерная, в среднем, и др. Общим для всех определений предела является неограниченное «сближение» элементов f_n и f при $n \to \infty$. В зависимости от того, как определено понятие «близости» расстояния между элементами, получаются разные определения предела.
В связи с этим разумно аксиоматизировать понятие расстояния между элементами произвольного множества и получить *общие свойства предельного перехода*, отвлекаясь от специфики элементов множества.

♦ Вещественная функция

$$\rho : X \times X \to \mathbb{R}^1$$

называется *метрикой* на множестве X (или расстоянием между $x, y \in X$) и обозначается через $\rho(x, y)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$ (условие положительности);
2. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (условие равенства нулю);
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (условие симметричности);
4. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Условия 1–4 иногда называют аксиомами метрики.

♦ Пара $\langle X, \rho\rangle$, состоящая из множества X и заданной на нем метрики ρ, называется *метрическим пространством*.

◊ В случае, когда из контекста ясно, о какой метрике идёт речь, метрическое пространство $\langle X, \rho\rangle$ часто обозначается тем же символом, что и множество X.

Приведём несколько примеров метрических пространств.

Пример 1

Показать, что функция $\rho(\vec{x},\vec{y})$, отображающая пространство $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}$ по правилу

$$\text{а)}\quad \rho_2(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}; \tag{1}$$

$$\text{б)}\quad \rho_1(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{k=1}^{n}|x_k - y_k|, \tag{2}$$

является метрикой, а n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ — метрическим.

Решение. а) Очевидно, что функция $\rho(\vec{x},\vec{y})$ удовлетворяет первым трём условиям метрики. Проверим выполнение четвёртого.

Неравенство треугольника следует из неравенства Коши–Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{3}$$

Заметим, что

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}.$$

Тогда, согласно теореме косинусов, эта функция удовлетворяет и четвёртому условию.

Для случая б) решение аналогично.

Пример 2

Показать, что функция

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y, \end{cases}$$

определённая на множестве «изолированных» точек X, является метрикой.

Решение. Решить самостоятельно.

Пример 3

Показать, что функция

$$\rho(x, y) = |x - y|,$$

определённая на множестве вещественных чисел $\mathbb{R}^1$, является метрикой, а само $\mathbb{R}^1$ — метрическим пространством.

Решение. Решить самостоятельно.

Пример 4

Показать, что на множестве непрерывных на $[a, b]$ функций функция

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)| \tag{4}$$

является метрикой.

Решение. Из условия $\rho(x, y) = 0$ с очевидностью следует, что $x(t) = y(t)$. Кроме того, из определения модуля следует, что эта функция симметрична, т.е. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Проверим выполнение неравенства треугольника. Заметим, что

$$|x(t) - y(t)| \leqslant |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|.$$

Следовательно,

$$\rho(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)| + \max_{t \in [a,b]} |z(t) - y(t)| = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

Таким образом, функция (4) является метрикой, а пространство $\mathcal{C}([a, b])$ – метрическим.

Пример 5

Показать, что сходимость в пространстве $\mathcal{C}[a,b]$ эквивалентна равномерной сходимости на $[a,b]$.

Решение. Рассмотрим последовательность функций $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n(t) \in [a,b]$, такую что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} \max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)|,$$

где $x_0(t) \in \mathcal{C}[a,b]$. Тогда, по определению, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что

$$\max_{t\in[a,b]} |x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|x_n(t) - x_0(t)| < \varepsilon, \qquad t \in [a,b],$$

т.е. последовательность $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x_0(t)$ равномерно. Справедливо и обратное: если $\{x_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $x(t)$ равномерно, то

$$\rho(x_n, x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

что и требовалось показать.

♦ Пусть $\langle X, \rho\rangle$ – метрическое пространство. Тогда любое его подмножество $A \subset X$, которое также является метрическим пространством $\langle A, \rho\rangle$, называется *подпространством* пространства $\langle X, \rho\rangle$.

♦ Биекция, отображающая метрическое пространство $\langle X, \rho\rangle$ на метрическое пространство $\langle Y, \alpha\rangle$ $(h : \langle Y, \rho\rangle)$ и сохраняющая метрику:

$$\rho(x, y) = \alpha(h(x), h(y)),$$

называется *изометрией*.

♦ Нормой в L называют функционал $p(x)$, удовлетворяющий условиям (аксиомам нормы):
1. $p(x) \geqslant 0$ ($p = 0 \Leftrightarrow x = 0$);
2. $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ для всех $x, y \in L$ (аксиома треугольника);
3. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для всех α.
Норму элемента $x \in L$ обозначают $\|x\|$.
♢ Всякое нормированное пространство становится метрическим, если ввести расстояние по формуле

$$\rho(x, y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \|x - y\|.$$

Это означает, что все свойства, доказанные для метрических пространств, справедливы и для нормированных пространств. В частности, автоматически переносится важнейшее понятие сходимости.
♦ Последовательность x_n сходится к x по норме, если

$$\|x_n - x\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Важнейшим классом линейных нормированных пространств являются полные пространства.

♦ Линейное нормированное полное пространство называется *банаховым* (типа B или B-пространством).

B-пространства — важнейший тип пространств. Например, в B-пространствах развита теория уравнений (интегральных и др.)

Это связано с тем, что рассматриваемые уравнения решаются итерационными методами и вопрос о сходимости итерационной процедуры легче всего исследовать в полном пространстве.

Понятие расстояния между элементами множества позволяет перенести в метрические пространства важнейшие понятия классического анализа.

♦ Множество элементов метрического пространства X, удовлетворяющих условию

$$S(a, r) = \{x | x \in X, \rho(a, x) < r\},$$

называется *открытым шаром* с центром в a и радиусом r, а множество элементов, удовлетворяющих условию

$$S[a, r] = \{x | x \in R, \rho(a, x) \leqslant r\},$$

— *замкнутым шаром*.

♦ Открытый шар с центром в $x_0 \in X$ и радиусом ε называется ε-*окрестностью* точки x_0 и обозначается

$$S(x_0, \varepsilon) \equiv O_\varepsilon(x_0).$$

♦ Множество $M \subset X$ называется *ограниченным*, если существуют такие $r < \infty$ и $a \in X$, что

$$M \subset S(a, r).$$

♦ Точка $x_0 \in M$ называется *изолированной* точкой множества M, если существует ε-окрестность точки x_0 ($O_\varepsilon(x_0)$), которая не содержит элементов множества M, отличных от x_0:

$$M \cap O_\varepsilon(x_0) = \{x_0\}.$$

♦ Точка $x_0 \in X$ называется *предельной точкой* множества $M \subset X$, если любая её ε-окрестность содержит по крайней мере один элемент множества M, отличный от x_0.

♦ Точка x_0 называется *внутренней точкой* множества M, если существует ε-окрестность точки x_0, целиком лежащая в M ($S(x_0, \varepsilon) \subset M$).

♢ Предельная точка множества M может принадлежать или не принадлежать M.

♦ Множество M называется *замкнутым множеством*, если оно содержит все свои предельные точки.

♦ Множество $[M]$, содержащее множество M и все его предельные точки, называется *замыканием множества* M. Операция перехода от множества M к множеству $[M]$ называется *операцией замыкания*.

Теорема 1

Операция замыкания обладает свойствами:
1) $M \subset [M]$;
2) $[[M]] = [M]$;
3) *Если* $M_1 \subset M_2$, *то* $[M_1] \subset [M_2]$;
4) $[M_1 \cup M_2] = [M_1] \cup [M_2]$.

Доказательство. 1. Справедливость первого утверждения следует непосредственно из определения.
2. Рассмотрим произвольный элемент x из $[[M]]$: $(x \in [[M]])$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $x_1 \in [M]$, что $x_1 \in O_\varepsilon(x)$. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon - \rho(x, x_1)$ и рассмотрим окрестность $O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Тогда для любого $z \in O_{\varepsilon_1}(x_1)$ справедливо

$$\rho(z, x) \leqslant \rho(z, x_1) + \rho(x, x_1) < \varepsilon_1 + \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Следовательно, $z \in O_\varepsilon(x)$.

Для любого $x \in [M]$ существует такое $x_2 \in M$, что $x_2 \in O_{\varepsilon_1}(x_1) \subset O_\varepsilon(x)$. Таким образом, из того, что $x \in [M]$, следует, что $[[M]] \subset [M]$, что и требовалось доказать.
Утверждения 3 и 4 доказываются аналогично.

$\Diamond$ Множество $[M]$ состоит из:
а) изолированных точек множества M;
б) предельных точек множества M, принадлежащих M;
в) предельных точек множества M, не принадлежащих M.

Перейдём к определению сходимости элементов метрического пространства.

♦ Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов множества X. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *сходящейся* по метрике к элементу x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Элемент x_0 называется пределом последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обозначается

$$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n, \qquad x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0. \tag{5}$$

Свойство 1

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность элементов множества X, сходящаяся к $x_0 \in X$. Тогда

1. предел последовательности единствен;
2. любая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к x_0;
3. множество $\{x_1, x_2, \dots\}$, состоящее из элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ограничено.

Доказательство. 1. Предположим противное:

$$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, \qquad x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y_0,$$

причём существует такое $\varepsilon > 0$, что $\rho(x_0, y_0) > \varepsilon$. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N_ε, что для всех $n > N_\varepsilon$ справедливо

$$\rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \rho(x_n, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда, согласно неравенству треугольника,

$$\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_n, y_0) < \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение.

Доказательство утверждений 2 и 3 дословно повторяет доказательство соответствующих утверждений классического анализа.

Определим теперь важную для дальнейшего изложения характеристику множества — его *плотность*.
Пусть A и B — два множества в метрическом пространстве X.
♦ Множество A называют *плотным* в множестве X, если его замыкание также принадлежит множеству X: $[A] \supset X$.
Множество A называется *всюду плотным* в X, если $[A] = X$.

Пример 6

Показать, что множество рациональных чисел всюду плотно в множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ (на числовой прямой).

Решение. По определению, множество действительных чисел является объединением множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел, причём всякое иррациональное число есть предел некоторой последовательности рациональных чисел. Таким образом, иррациональные числа являются предельными числами рациональных, откуда и следует справедливость утверждения.

♦ Множество A *нигде не плотно* в X, если оно не плотно ни в одном шаре $B \subset X$.
Например, если R — квадрат, а A — несколько изолированных точек, то A нигде не плотно в R.
♦ Пространство, в котором имеется счётное, всюду плотное множество, называют *сепарабельным*.
♢ Можно показать, что пространство X будет сепарабельным, если в пространстве X существует такая последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, что для любого $x_0 \in X$ найдётся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{x_n\}$, сходящаяся к x_0.

Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов*. V. *Дифференциальные уравнения*: учебное пособие. — Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. — 396 с.