

# Городская олимпиада по физике (профиль)

от 25.04.2021г.

**Задача 1.** На гладкой горизонтальной поверхности лежит тело массой  $m$ . С одной стороны к телу привязан упругий шнур с коэффициентом упругости  $k$ . Шнур распрямили и привязали другой конец к неподвижной опоре. С другой стороны к телу привязали второй такой же шнур и начали тянуть его с переменной силой  $F = \alpha t$  в противоположную сторону. Прочность шнуров на разрыв равна  $T = \frac{3\alpha\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}$ . Определить, какой из шнуров разорвется первым.

**Решение:**

Уравнение движения

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = \alpha t$$

перепишем в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \left( x - \frac{\alpha}{k} t \right) = 0.$$

Обозначим  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ . Тогда уравнение движения примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \left( x - \frac{\alpha}{k} t \right) = 0,$$

а его решение –

$$x = A \sin(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{k} t,$$

причем

$$v = A \omega_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{k}.$$

Из начальных условий ( $x = 0$  и  $v = 0$  при  $t = 0$ ) найдем постоянную:  $A = -\frac{\alpha}{k\omega_0}$ .

Таким образом, сила натяжения первого шнура равна

$$f_1 = kx = \alpha t - \frac{\alpha}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

сила натяжения второго –

$$f_2 = \alpha t.$$

В первый полупериод (при  $0 < \omega_0 t < \pi$ ) сила натяжения первого шнура меньше, чем второго:  $f_1 < f_2$ , причем  $0 < f_2 < \frac{\alpha\pi}{\omega_0}$ . Во второй полупериод (при  $\pi < \omega_0 t < 2\pi$ ) сила натяжения второго шнура меньше, чем первого:  $f_2 < f_1$ , причем  $\frac{\alpha\pi}{\omega_0} < f_2 < \frac{2\alpha\pi}{\omega_0}$ . Следовательно, в момент разрыва  $f_2 = \frac{3\alpha\pi}{2\omega_0} = T < f_1$ , т.е. первым разорвется шнур, привязанный к неподвижной опоре.

**Ответ:** первым разорвется шнур, привязанный к неподвижной опоре.

**Задача 2.** Два массивных стержня длиной  $l_1$  и  $l_2$  подвешены за верхние концы в одной точке  $O$ . Один из стержней отклонили на малый угол ипустили, после чего он испытал удар с другим стержнем, при котором угловые скорости в первый момент времени равны по величине и направлению. Определить соотношение длин стержней  $l_1/l_2$  и масс стержней  $m_1/m_2$ , если известно, что при следующем ударе оба стержня остановились.

**Решение:**

После удара в точке равновесия стержни начали двигаться с одинаковыми угловыми скоростями. При следующем ударе оба стержня остановились в этой же точке. Следовательно, к моменту возвращения в точку равновесия одного из них (через полпериода, допустим  $\frac{1}{2}T_2$ ), другой стержень завершил полный период колебаний ( $T_1$ ). Иными слова, период колебаний одного из них в 2 раза больше периода колебаний другого:  $T_1 = \frac{1}{2}T_2$ .

Стержни при втором ударе остановятся, если их моменты импульса равны по модулю. При втором ударе угловые скорости стержней также будут одинаковыми, как и при первом. Следовательно, стержни обладают равными моментами инерции:  $I_1 = I_2$ .

Период колебаний стержня как физического маятника равен  $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}$ . Отсюда следует, что соотношение длин стержней  $\frac{l_2}{l_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = 4$ . Из равенства моментов инерции находим соотношение масс стержней  $\frac{m_1}{m_2} = \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2 = 16$ .

**Ответ:**  $\frac{l_1}{l_2} = \frac{1}{4}, \frac{m_1}{m_2} = 16$ .

**Задача 3.** Первое тело нагрели в термостате, температура которого неизвестна. Затем тело извлекли из термостата и приложили ко второму телу на время необходимое для установления теплового равновесия, при этом температура второго тела изменилась от  $T_1$  до  $T_2$ . Затем первое тело снова нагрели в термостате и приложили ко второму телу, при этом температура второго тела изменилась от  $T_2$  до  $T_3$ . Определить максимальную температуру, до которой можно нагреть второе тело при многократном повторении этой операции.

**Решение:**

Пусть  $T$  температура термостата. Теплоемкость первого тела  $C_1$  второго  $C_2$ . Тогда при первом контакте тел выполняется равенство

$$(T - T_2)C_1 = (T_2 - T_1)C_2,$$

при втором –

$$(T - T_3)C_1 = (T_3 - T_2)C_2.$$

Исключив теплоемкости, приходим к следующему выражению

$$\frac{(T - T_2)}{(T_2 - T_1)} = \frac{(T - T_3)}{(T_3 - T_2)}.$$

Откуда искомая температура равна

$$T = \frac{T_1 T_3 - T_2^2}{T_3 - 2T_2 + T_1}.$$

**Ответ:**  $T = \frac{T_1 T_3 - T_2^2}{T_3 - 2T_2 + T_1}.$

**Задача 4.** Определить напряженность электрического поля в центре основания четырехгранной правильной пирамиды, боковые грани которой, представляют собой равносторонние треугольники, заряженные равномерно поверхностной плотностью заряда  $\sigma$ .

**Решение:**

Поместим в центр основания пирамиды точечный заряд  $Q$ . На основании данной пирамиды построим вторую такую же с вершиной по другую сторону от основания. Точечный заряд создает поток напряженности электростатического поля  $\vec{E}_Q$  через получившуюся фигуру равный  $\frac{Q}{\varepsilon_0}$ . Поток сквозь все боковые грани одинаковые и равны  $\frac{1}{8}$  полного потока, т.е.  $\frac{Q}{8\varepsilon_0}$ .

Выразим модуль силы взаимодействия точечного заряда  $Q$  с одной боковой гранью пирамиды:

$$F = \int (E_Q)_n dq = \int (E_Q)_n \sigma dS = \sigma \int (E_Q)_n dS = \sigma \frac{Q}{8\varepsilon_0}.$$

С другой стороны  $F = QE_1$ ,  $E_1$  где – напряженность электростатического поля одной боковой грани. Тогда  $E_1 = \frac{\sigma}{8\varepsilon_0}$ .

Напряженность электростатического поля, создаваемая одной гранью, направлена под углом  $\alpha$  между нормалью к боковой грани и к основанию пирамиды. Причем нормаль, проведенная из центра боковой грани, попадает в центр основания и  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Следовательно, искомая напряженность поля в центре основания пирамиды равна

$$E = 4E_1 \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}\sigma}{6\varepsilon_0}.$$

**Ответ:**  $E = \frac{\sqrt{3}\sigma}{6\varepsilon_0}$ .

**Задача 5.** Найти максимальную энергию электрического поля между двумя плоскими проводниками длиной  $l$  и шириной  $a$ , находящимися на расстоянии  $h \ll a \ll l$  друг от друга и замкнуты на одном конце. По проводникам течет ток амплитудой  $I_0$ , который создается источником напряжения с частотой  $\omega$ , подключенным к другим концам.

Решение

Линейная плотность тока, текущего по проводнику  $I = \frac{I_0}{a} \cos(\omega t)$ . Магнитное поле между проводниками  $B = \mu_0 i = \mu_0 \frac{I_0}{a} \cos(\omega t)$ . Энергия магнитного поля  $W_m = \mu_0 \frac{I_0^2}{2a^2} ahl = \mu_0 \frac{I_0^2}{2a} hl$ . Магнитный поток  $\Phi = \mu_0 lh \frac{I_0}{a} \cos(\omega t) = LI_0 \cos(\omega t)$ . ЭДС  $Eh = -\frac{d\Phi}{dt} = \mu_0 lh \omega \frac{I_0}{a} \sin(\omega t)$ .  $E = \mu_0 l \omega \frac{I_0}{a} \sin(\omega t)$  Напряженность поля растет от нуля до максимума  $\mu_0 l \omega \frac{I_0}{a}$  по длине проводника  $E(x) = \mu_0 l \omega \frac{I_0}{a} \frac{x}{l} = \mu_0 \omega \frac{I_0}{a} x$ .

Энергия электрического поля  $W_э = \int_0^l \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} a h dx = \int_0^l \varepsilon_0 \frac{(\mu_0 \omega \frac{I_0}{a} x)^2}{2} a h dx = \frac{1}{6a} \mu_0^2 \omega^2 I_0^2 l^3 \varepsilon_0$