

Решение задач олимпиада осень 2021

1. Древняя былина гласит, что великий богатырь Никита Силыч мог пройти под дождем, вращая над собой меч и остаться сухим. Оцените, с какой минимальной частотой и как необходимо вращать меч богатырю при температуре воздуха 20°C и давлении 10^5 Па. При решении меч считать прямоугольником 5×90 см², а капли дождя – шарообразными диаметром 0,5 мм. Учесть, что на каплю при движении в воздухе со скоростью v действует сила сопротивления $F_x = \frac{\rho v^2}{2} S C_x$, где ρ – плотность воздуха, S – площадь максимального поперечного сечения капли, а C_x – коэффициент лобового сопротивления, равный 1,1 в условиях задачи. Принять, что капля, коснувшись меча прилипает к нему и далее удаляется с конца меча за счет центробежных сил. Значение ускорения свободного падения $g = 9,81$ м/с².

Решение

При вращении меч замечает некую область. Все капли, которые находятся в этой области в течении времени меньшего, либо равного периоду обращения меча, прилипают к нему и далее удаляются. Для того, чтобы собирать максимум капель, необходимо максимально увеличить объем замечаемой области, который зависит от угла поворота меча. Так как размер богатыря неизвестен, то оптимально вращать горизонтально и повернуть меч плашмя, т.е. чтобы и горизонтальные и вертикальная проекции были максимальными. При этом замечается цилиндр с высотой, равной ширине меча H .

При падении на каплю действуют три силы: тяжести $F_t = mg$, сопротивления $F_x = \frac{\rho v^2}{2} S C_x$ и Архимеда $F_a = \rho g V$, где m – масса капли, g – ускорение свободного падения, ρ – плотность воздуха, S – площадь максимального поперечного сечения капли, C_x – коэффициент лобового сопротивления, V – объема капли, причем сила тяжести направлена вниз, а силы сопротивления и Архимеда – вверх. Сразу после того, как капля возникла и начала движение, есть период ускоренного движения, когда сила сопротивления мала. Далее скорость достигает максимального значения и силы компенсируют друг друга. Время ускоренного движения обычно много меньше времени равномерного при падении капли и земли капли достигают именно с этой скоростью. Найдем ее из условия равенства сил $F_t = F_x + F_a$:

$$m g = \frac{\rho v^2}{2} S C_x + \rho g V,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho S C_x} (m g - \rho g V)} = \sqrt{\frac{2 V g}{S C_x} \cdot \frac{\rho_b - \rho}{\rho}},$$

где учтено, что $m = \rho_b V$, а ρ_b – плотность воды. Площадь поперечного сечения и объем капли диаметра r равны

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \quad V = \frac{\pi d^3}{6},$$

Воздух при условиях задачи можно считать идеальным газом и его плотность можно найти из уравнения Менделеева-Клапейрона $p V_r = \frac{m_r}{M} R T$:

$$\rho = \frac{m_r}{V_r} = \frac{p M}{R T},$$

где $M = 29$ г/моль – молярная масса воздуха, R – универсальная газовая постоянная, T – температура.

Тогда скорость

$$v = \sqrt{\frac{2 g}{C_x} \cdot \frac{\rho_b - \rho}{\rho} \cdot \frac{\pi d^3 4}{6 \pi d^2}} = \sqrt{\frac{4 d g}{3 C_x} \left(\frac{\rho_b}{\rho} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{4 d g}{3 C_x} \left(\frac{\rho_b R T}{p M} - 1 \right)}$$

Найдем время падения капли через заметаемый объем высотой H :

$$t = \frac{H}{v}.$$

Период обращения меча должен быть не больше этого времени и, следовательно, минимальная частота обращения

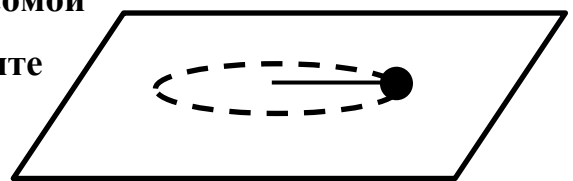
$$\nu = \frac{1}{t} = \frac{v}{H} = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{4 d g}{3 C_x} \left(\frac{\rho_b R T}{p M} - 1 \right)}.$$

Подставив числовые значения, получим

$$\nu = \frac{1}{5 \cdot 10^{-2}} \sqrt{\frac{4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81}{3 \cdot 1,1} \left(\frac{10^3 \cdot 8,31 \cdot (273,15 + 20)}{10^5 \cdot 29 \cdot 10^{-3}} - 1 \right)} \approx 44,7 \text{ Гц}$$

Ответ: $\nu = 44,7$ Гц

2. Два тела массами m связаны невесомой нерастяжимой нитью (смотрите рисунок). Верхнее тело движется с постоянной скоростью по окружности

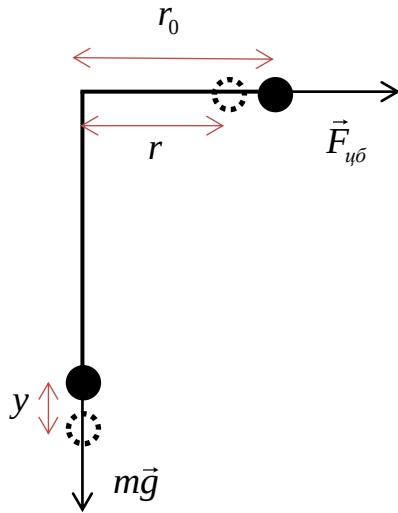


радиусом r_0 . Нижнее тело перемещают на небольшое расстояние вниз и отпускают. Определите частоту малых колебаний,

которые при этом возникают. Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение.

Вариант 1. Используем уравнение движения.



При равновесии сила тяжести уравнивается центробежной силой инерции $mg = F_{цб}$,

$$mg = m\omega_0^2 r_0. \text{ Поэтому } \omega_0^2 = g / r_0.$$

При смещении из положения равновесия на y , можно записать уравнение движения

$$2m\ddot{y} = -F_{цб} + mg$$

При уменьшении радиуса вращения угловая скорость вращения изменится $F_{цб} = m\omega^2 r$.

Ее найдем из закона сохранения момента импульса $I_0\omega_0 = I\omega$, $mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$, $\omega = \omega_0 r_0^2 / r^2$. Подставляем в уравнение движения

$$2m\ddot{y} = -m\omega^2 r + mg = -m\omega_0^2 \frac{r_0^4}{r^4} r + mg \quad \text{делим на } m$$

$$2\ddot{y} = -g \frac{r_0^3}{r^3} + g$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{2} \left(-1 + \frac{r_0^3}{r^3} \right) = 0$$

Используем связь $r = r_0 - y$

$$\ddot{y} + \frac{g}{2} \left(-1 + \frac{r_0^3}{(r_0 - y)^3} \right) = \ddot{y} + \frac{g}{2} \left(-1 + \frac{1}{(1 - y / r_0)^3} \right) = 0$$

$$\frac{1}{(1 - y / r_0)^3} \approx 1 + 3y / r_0, \quad y \ll r_0$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{2} (-1 + 1 + 3y / r_0) = \ddot{y} + \frac{g}{2} (3y / r_0) = 0.$$

Получили уравнение гармонического осциллятора. Круговая частота колебаний: $\Omega = \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}$. Частота малых колебаний $\nu = 2\pi \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}$.

Вариант 2. Используем закон сохранения энергии.

Полная механическая энергия системы

$$mgy + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{m(\dot{r}^2 + v_\varphi^2)}{2} = \text{const}.$$

$\dot{r}^2, v_\varphi^2$ – проекции скорости верхнего тела. Делим на массу и дифференцируем.

$$g\dot{y} + \frac{1}{2}2\dot{y}\ddot{y} + \frac{1}{2}(2\dot{r}r + 2v_\varphi\dot{v}_\varphi) = 0.$$

Нить нерастяжимая, поэтому $\dot{y} = \dot{r}$, $\ddot{y} = \ddot{r}$.

Дифференцируем закон сохранения момента импульса $M = mv_\varphi r = \text{const}$.

$$m\dot{v}_\varphi r + mv_\varphi \dot{r} = 0, \dot{v}_\varphi r = -v_\varphi \dot{r}, v_\varphi \dot{v}_\varphi = v_\varphi (-v_\varphi \dot{r} / r).$$

$$g\dot{y} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{y} - v_\varphi^2 \dot{r} / r = 0.$$

Делим на $\dot{y}$.

$$g + 2\ddot{y} - v_\varphi^2 / r = 0.$$

Из закона сохранения момента импульса $mv_\varphi r = mv_{0\varphi} r_0$.

$v_\varphi = v_{0\varphi} r_0 / r = \sqrt{gr_0} r_0 / r$. Здесь использовано, что в положении равновесия

$$mv_{0\varphi}^2 / r_0 = mg.$$

$$g + 2\ddot{y} - \frac{1}{r} gr_0 \frac{r_0^2}{r^2} = g + 2\ddot{y} - g \frac{r_0^3}{r^3} = 0.$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{2} \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3} \right) = 0.$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{2} \left(1 - \frac{r_0^3}{(r_0 - y)^3} \right) = \ddot{y} + \frac{g}{2} \left(1 - \frac{1}{(1 - r_0 / y)^3} \right) = 0.$$

$$\frac{1}{(1 - y / r_0)^3} \approx 1 + 3y / r_0, \quad y \ll r_0$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{2}(-1+1+3y/r_0) = \ddot{y} + \frac{g}{2}(3y/r_0) = 0.$$

Получили уравнение гармонического осциллятора. Круговая частота:

$$\Omega = \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}. \text{ Частота малых колебаний } \nu = 2\pi \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}.$$

Ответ: $\nu = 2\pi \sqrt{\frac{3g}{2r_0}}$

3. Циклический процесс с участием идеального газа представлен в координатах T - S на рис. Масштаб подобран так, что процессы 3-4 и 6-1 имеют вид полуэллипсов. Известно, что в результате адиабатических процессов температура газа меняется в α раз. Суммарная работа, совершаемая газом в результате процессов его изотермического расширения, равна A . Отношение максимальной и минимальной температур газа в цикле составляет $\frac{T_{max}}{T_{min}} = \beta = \frac{4\alpha}{\pi}$. Максимальное изменение энтропии газа в пределах цикла равно ΔS . Найти КПД тепловой машины, работающей по данному циклу. Минимальную температуру T_{min} газа в цикле считать известной.

Решение:

КПД тепловой машины определяется как

$$\eta = \frac{A_{пол}}{Q_1}$$

где полезная работа $A_{пол}$ в случае циклических процессов определяется как

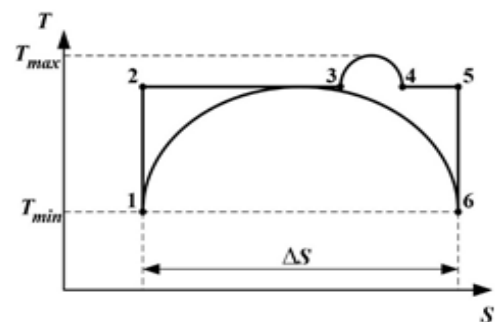
$$A_{пол} = \oint \delta Q = Q_1 - Q_2$$

где Q_1 и Q_2 – суммарная теплота полученная и отданная идеальным газом за цикл, соответственно.

Поскольку для обратимых процессов

$$TdS = \delta Q,$$

то площадь под кривой зависимости $T(S)$ дает теплоту, полученную газом в заданном процессе.



Отметим, что процессы 1-2 и 5-6 являются адиабатическими (изоэнтروпийными) так как в них $\Delta S = 0$. Таким образом,

$$Q_1 = Q_{23} + Q_{34} + Q_{45}, \Delta S > 0$$

$$Q_2 = Q_{56}, \Delta S < 0$$

Найдем все теплоты полученные, идеальным газом в процессах цикла. Для изотермических процессов 2-3 и 4-5 имеем

$$Q_{23} + Q_{45} = \Delta U_{23} + \Delta U_{45} + A_{23} + A_{45}.$$

Для идеального газа изменение внутренней энергии в изотермическом процессе ($T = const$) равно нулю. Тогда $\Delta U_{23} = 0$ и $\Delta U_{45} = 0$, а

$$Q_{23} + Q_{45} = A,$$

так как по условию суммарная работа, совершаемая газом в результате процессов его изотермического расширения, равна $A = A_{23} + A_{45}$.

Теплота Q_{34} определяется как сумма площадей поллуэллипса и прямоугольника:

$$Q_{34} = T_2 \Delta S_{34} + \frac{1}{2} \pi (T_{max} - T_2) \frac{\Delta S_{34}}{2}$$

Здесь учтено, что площадь эллипса определяется как πab , где одна полуось $a = \frac{\Delta S_{34}}{2}$, а вторая $b = T_{max} - T_2$.

Исходя из рисунка изменение энтропии ΔS_{34} можно найти как

$$\Delta S_{34} = \Delta S - (\Delta S_{23} + \Delta S_{45}) = \Delta S - \left(\frac{Q_{23}}{T_2} + \frac{Q_{45}}{T_2} \right) = \Delta S - \frac{A}{T_2}$$

где $T_2 = \alpha T_{min}$ по условию для адиабатического процесса 1-2.

Теплота Q_{56} также определяется как сумма площадей поллуэллипса и прямоугольника:

$$Q_{56} = T_{min} \Delta S + \frac{1}{2} \pi (T_2 - T_{min}) \frac{\Delta S}{2}$$

В итоге имеем

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_{23} + Q_{34} + Q_{45} = A + T_2 \Delta S_{34} + \frac{1}{2} \pi (T_{max} - T_2) \frac{\Delta S_{34}}{2} = \\ &= A + \alpha T_{min} \left(\Delta S - \frac{A}{\alpha T_{min}} \right) + \frac{1}{4} \pi (\beta T_{min} - \alpha T_{min}) \left(\Delta S - \frac{A}{\alpha T_{min}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= A + \alpha T_{min} \Delta S - A + \frac{1}{4} \pi \left(\frac{4\alpha}{\pi} - \alpha \right) \left(T_{min} \Delta S - \frac{A}{\alpha} \right) = \\
&= \alpha T_{min} \Delta S + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) (\alpha T_{min} \Delta S - A) \\
&= T_{min} \Delta S \left(\alpha + \alpha - \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\
&= T_{min} \Delta S \left(2\alpha - \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \\
Q_2 = Q_{56} &= T_{min} \Delta S + \frac{1}{2} \pi (\alpha T_{min} - T_{min}) \frac{\Delta S}{2} = T_{min} \Delta S \left(1 + \frac{\pi}{4} (\alpha - 1) \right)
\end{aligned}$$

Тогда КПД тепловой машины

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{A_{пол}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_{min} \Delta S \left(1 + \frac{\pi}{4} (\alpha - 1) \right)}{T_{min} \Delta S \left(2\alpha - \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right)} = \\
\eta &= \frac{A_{пол}}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_{min} \Delta S \left(1 + \frac{\pi}{4} (\alpha - 1) \right)}{T_{min} \Delta S \left(2\alpha - \frac{\pi\alpha}{4} - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right)} = \\
&= 1 - \frac{1 + \frac{\pi}{4} (\alpha - 1)}{\alpha \left(2 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)} = 1 - \frac{\alpha + \frac{4}{\pi} - 1}{\alpha \left(\frac{8}{\pi} - 1 \right) - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right)}
\end{aligned}$$

Отметим, что при решении задачи теплоты Q_2 и Q_{56} брались по абсолютной величине, так как знак «—» уже учтен в формуле для полезной работы $A_{пол} = Q_1 - Q_2$.

Ответ: $\eta = 1 - \frac{\alpha + \frac{4}{\pi} - 1}{\alpha \left(\frac{8}{\pi} - 1 \right) - \frac{A}{T_{min} \Delta S} \left(\frac{4}{\pi} - 1 \right)}$

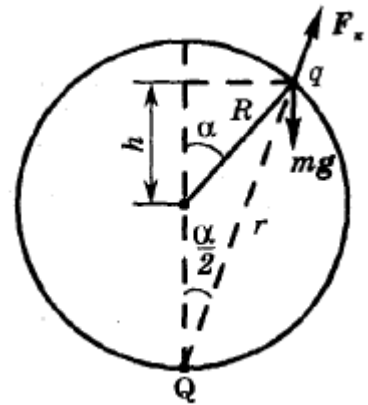
4. Система, состоящая из неподвижного диэлектрического кольца радиусом R , проводящего маленького шарика массой m с зарядом $+q$ и точечного заряда Q . Точечный заряд находится в нижней внутренней части кольца, а шарик в верхней. Найти при каком значении заряда Q , система шарик-заряд будет находится в устойчивом равновесии. Поляризацию кольца не учитывать.

Решение:

Кулоновская сила должна, уравнивая силу тяжести:

$$\frac{kQq}{4R^2} \geq mg$$

Однако этого мало. В верхней точке шарик должен иметь положение устойчивого равновесия, т. е. потенциальная энергия W_p при смещении шарика из верхнего положения должна увеличиваться. Эта энергия складывается из энергии mgh притяжения к Земле (высоту h можно, например, отсчитывать от уровня центра кольца) и энергии кулоновского отталкивания $\frac{kQq}{r}$ (см. рисунок):



$$W_p = mgh + \frac{kQq}{r}$$

Рассмотрим изменение W_p при смещении шарика из верхнего положения (шарик не отрывается от поверхности кольца!). Величину смещения будем характеризовать углом α . Тогда (см. рисунок) $h = R \cos \alpha$; $r = 2R \cos \frac{\alpha}{2}$. Потенциальную энергию W_p удобно записать как функцию величины $x = \cos \frac{\alpha}{2}$; тогда получим

$$W_p = mgR(2x^2 - 1) + \frac{kQq}{2Rx}$$

Нас интересует поведение этой функции вблизи $\alpha = 0$, т. е. вблизи $x = 1$. Для того, чтобы равновесие шарика в верхней точке было устойчивым, необходимо, чтобы W_p увеличивалась при увеличении α , т. е. при уменьшении x . Это значит, что производная W'_p при $x = 1$ должна быть отрицательной:

$$W'_p|_{x=1} = \left(4xmgR - \frac{kQq}{2Rx^2} \right) |_{x=1} = 4mgR - \frac{kQq}{2R} < 0 \quad (1)$$

Отсюда получаем $Q > \frac{8mgR^2}{kq} > \frac{32\pi\epsilon_0 mgR^2}{q}$. Мы видим, что условие устойчивости является более сильным, чем просто условие равновесия, т. е. неравенство (1). Тот же результат можно получить иначе.

Равновесие шарика будет устойчивым, если при малых углах α модуль проекции кулоновской силы F_k на касательную к окружности (см. рисунок) превышает модуль проекции силы тяжести mg на то же направление:

$$F_k \sin \frac{\alpha}{2} > mgsin\alpha.$$

Поскольку при малых α можно считать $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$, получаем $F_k > 2mg$,

$$\text{откуда } Q > \frac{8mgR^2}{kq} > \frac{32\pi\epsilon_0 mgR^2}{q}$$

$$\text{Ответ: } Q > \frac{32\pi\epsilon_0 mgR^2}{q}$$

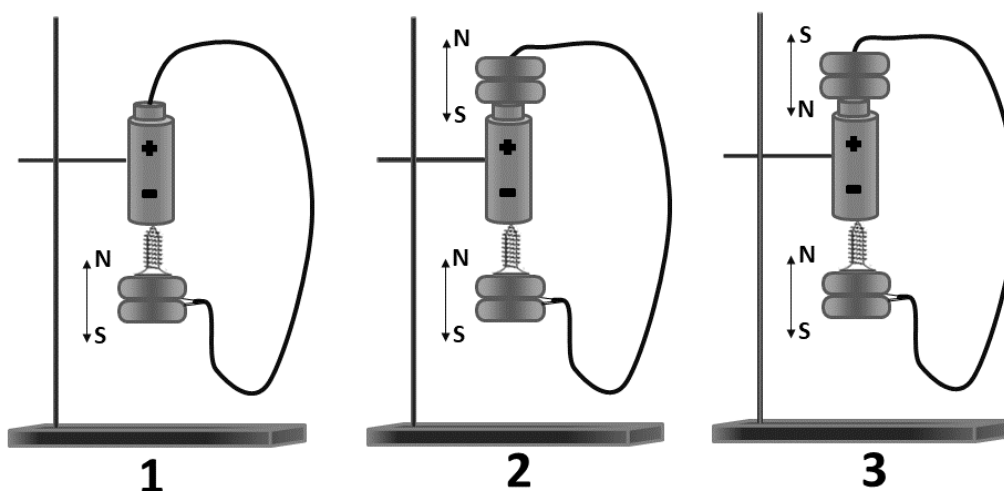
5. Батарейка закреплена на штативе (см. рисунок 1). Благодаря двум магнитам шуруп висит под батареейкой, примагнитившись к ней острым концом. Шуруп вместе с магнитами может легко вращаться. Магниты неодимовые (мощные постоянные проводящие магниты). Направление их полюсов указано на рисунке. Шуруп обладает левой резьбой.

Один из концов тонкого провода жестко закреплен в верхней части конструкции. Второй конец провода приводят в соприкосновение с магнитами как указано на рисунке 1. Магниты начинают вращаться.

Затем добавляют магниты к верхнему полюсу батарейки. Вновь один из концов тонкого провода жестко закрепляют в верхней части конструкции. Второй конец провода приводят в соприкосновение с нижними магнитами как указано на рисунках 2 и 3.

1. Объясните причину такого поведения магнитов.

2. Определите направления вращения магнитов на всех рисунках.



Решение:

1. Конструкция представляет собой униполярный электродвигатель. Это разновидность электрических машин постоянного тока. Содержит проводящий диск, постоянное магнитное поле, параллельное оси вращения диска, 1-й токосъёмник на оси диска и 2-й токосъёмник у края диска. Токи, наведенные во вращающемся проводнике (магните), текут от периферии к центру (см. расположение полюсов батарейки на рисунках). В постоянном магнитном поле на них действует сила, направление которой определяется правилом левой руки. Ее действие приводит к вращению магнитов совпадает с направлением векторного произведения $[\vec{I}d\vec{l}, \vec{B}]$.
2. Если смотреть с острия шурупа, то диск вращается против часовой стрелки во всех трех случаях. Верхние магниты лишь ослабляют/усиливают магнитную индукцию нижних магнитов, при этом вектор магнитной индукции результирующего поля в области нижних магнитов на всех рисунках направлен вверх (см. направление полюсов магнитов на рисунках).