

1. Тонкая лента толщиной d перематывается с одного вала на другой. Как должна меняться угловая скорость ведущего вала, чтобы линейная скорость ленты была постоянной и равной v . В начальный момент времени лента намотана на ведущий вал. Радиус валов равен R . Принять $R \gg d$.

Решение:

Для того, чтобы линейная скорость ленты была постоянна, необходимо чтобы в любой момент выполнялось равенство $\omega r = v$. Найдем зависимость радиуса r вала с намотанной лентой от времени t . Объем ленты намотанный на вал $V = \pi l(r^2 - R^2)$, где l - ширина ленты. В тоже время этот же объем ленты пройдет через произвольную покоящуюся точку со скоростью v , поэтому $V = v t l d$.

$$r(t) = \sqrt{R^2 - \frac{vtd}{\pi}}, \text{ тогда } \omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 - \frac{vtd}{\pi}}}$$

Ответ: $\omega(t) = \frac{v}{\sqrt{R^2 - \frac{vtd}{\pi}}}$

2. На горизонтальном столе лежит система из трех тел, связанных не весомой, не растяжимой нитью. К телу массой m_1 приложена горизонтальная сила F . Коэффициент трения между столом и телами и между соприкасающимися телами m_1 и m_2 равен μ . Массы тел $m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $m_3 = 4m$. Массой блока и трением в его оси пренебречь.



1. Найти силу натяжения нити, если тела m_1 и m_2 скрепить, а параметры μ , F , m подобрать такими, чтобы тела двигались по столу как одно целое.
2. Найти силу натяжения нити, если параметры μ , F , m подобраны так, что не скреплённые тела m_1 и m_2 движутся друг по другу, а тела m_1 и m_3 по столу.

Решение:

1)

$$a_0 = \frac{F}{m_1 + m_2 + m_3} - \mu g$$

$$2T_0 - \mu m_3 g = m_3 a_0$$

$$T_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_3 F}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$T_0 = \frac{1}{3} F$$

2) Связь ускорений: $a_1 = a_3 + a$, $a_2 = a_3 - a$ (или $a_1 + a_2 = 2a_3$). Где, a ускорение брусков 1 и 2 относительно 3. По второму закону Ньютона

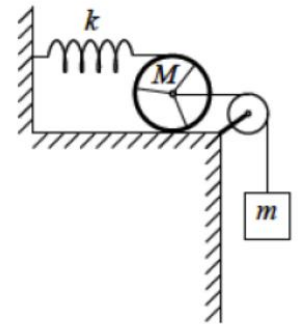
$$\begin{aligned}
F - \mu(m_1 + m_2)g - \mu m_2 g - T &= m_1(a_3 + a), \\
\mu m_2 g - T &= m_2(a_3 - a) \\
2T - \mu m_3 g &= m_3 a_3 \\
T \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3} \right) &= \frac{F}{m_1} + 2\mu g \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right)
\end{aligned}$$

Упростим

$$T = \frac{2}{5}(F - 2\mu mg)$$

Ответ: $T_0 = \frac{1}{3}F$; $T = \frac{2}{5}(F - 2\mu mg)$

3. Сплошной однородный диск массой M катается без проскальзывания в системе, изображённой на рисунке. Пружина наматывается на обод диска, ее жесткость равна k . Тело массой m совершает гармонические колебания. Определите период этих колебаний.



Решение:

Из закона сохранения энергии для всей системы:

$$\begin{aligned}
\frac{k(2x)^2}{2} + \frac{M\dot{x}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - mgx + \frac{m\dot{x}^2}{2} &= const \\
4kx^2 + (M + m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - 2mgx &= const
\end{aligned}$$

после дифференцирования и сокращения на множитель $\dot{x}$:

$$4kx + \left(\frac{3}{2}M + m \right) \ddot{x} - mg = 0$$

получаем выражение вида:

$$\ddot{x} + \frac{4k}{\frac{3}{2}M + m} \left(x - \frac{mg}{4k} \right) = 0.$$

Или из уравнений движений для тела и диска относительно мгновенной оси:

$$\begin{aligned}
mg - T &= m\ddot{x}, \\
-2RF_{\text{упр}} + TR &= I\varepsilon
\end{aligned}$$

где $I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2$ (по теореме Штейнера), $F_{\text{упр}} = k \cdot 2x$, $\varepsilon = \ddot{x}/R$, после исключения силы натяжения нити:

$$-2R \cdot 2kx + (mg - m\ddot{x})R = \frac{3}{2}MR\ddot{x}$$

приходим к тому же выражению

$$\ddot{x} + \frac{4k}{\frac{3}{2}M + m} \left(x - \frac{mg}{4k} \right) = 0.$$

Общий вид уравнения гармонических колебаний $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ позволяет найти период колебаний тела в системе:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{4k}} \sqrt{\left(\frac{3}{2}M + m \right)} = \frac{\pi}{\sqrt{k}} \sqrt{\left(\frac{3}{2}M + m \right)}$$

Ответ: $T = \pi \sqrt{\left(\frac{3M+2m}{2k} \right)}.$

4. В центре неотапливаемого небольшого служебного строения включили холодильник, работающий по обратному циклу Карно. Спустя время в строении установилась температура $T_1 = 17^\circ\text{C}$. Какая температура установится в строении, если при неизменных внешних условиях включить три таких же холодильника, а их теплоотводящие элементы вывести на улицу? Считать, что температура в морозильной камере холодильника поддерживается равной $T_2 = -12^\circ\text{C}$, а температура на улице $T_0 = 16^\circ\text{C}$. При решении задачи учесть, что теплопередача через стены строения и стенки холодильника осуществляется по закону Фурье:

$$\frac{dQ}{dt \cdot dS} \approx \eta \frac{\Delta T}{h}$$

где dQ – количество тепла, отводимое за время dt через стенку площадью dS и толщиной h ; η – коэффициент теплопроводности стенки; ΔT – перепад температур по разные стороны стенки.

Решение:

Запишем уравнение теплового баланса для первого случая, когда один холодильник включен в центре помещения:

$$Q_1 + Q_2 = Q_3, \quad (1)$$

где Q_1 – теплота, отводимая за единицу времени через стены помещения на улицу (по условию равновесная температура в комнате больше, чем снаружи и помещение не отапливается), Q_2 – теплота, передаваемая за единицу времени через стены холодильника морозильной камере, Q_3 – теплота, отводимая за единицу времени теплоотводящим элементом холодильника в помещение.

По условию теплота, отводимая за единицу времени через стены помещения на улицу и через стенки холодильника в морозильную камеру, определяется как

$$\frac{dQ}{dt} \approx \eta \frac{\Delta T}{h} dt \cdot dS \sim \Delta T,$$

т.е. можно записать, что

$$Q_1 = \alpha(T_1 - T_0),$$

$$Q_2 = \beta(T_1 - T_2).$$

КПД цикла Карно можно записать как

$$\text{КПД} = \frac{Q_3 - Q_2}{Q_3} = 1 - \frac{Q_2}{Q_3} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Здесь учтено, что в обратном цикле Карно теплота Q_2 забирается из холодильника (из морозильной камеры) при температуре T_2 , а теплота Q_3 передается с помощью теплоотводящего элемента нагревателю (помещению) при температуре T_1 . Тогда

$$\frac{Q_2}{Q_3} = \frac{T_2}{T_1} \text{ и } Q_3 = \frac{T_1}{T_2} Q_2$$

Тогда, подставляя полученные выражения для теплот в формулу (1), получаем

$$\alpha(T_1 - T_0) + \beta(T_1 - T_2) = \frac{T_1}{T_2} \beta(T_1 - T_2)$$

Запишем уравнение теплового баланса для второго случая, когда в помещении работает три холодильника, а их теплоотводящие элементы выведены на улицу. В этом случае помещение отдает теплоту Q'_2 холодильнику и забирает Q'_1 с улицы:

$$Q'_1 = Q'_2.$$

Используя, как и раньше, условие о теплопередаче по закону Фурье, получаем

$$Q'_1 = \alpha(T_0 - T'_1),$$

$$Q'_2 = \beta(T'_1 - T_2).$$

Здесь учтено, что температура T'_1 в помещении будет ниже, чем T_0 на улице, но больше, чем T_2 в холодильнике.

Тогда, объединяя уравнения теплового баланса для обоих случаев в систему уравнений, получаем.

$$\begin{cases} \alpha(T_1 - T_0) = \beta(T_1 - T_2) \left(\frac{T_1}{T_2} + 1 \right) \\ \alpha(T_0 - T'_1) = \beta(T'_1 - T_2) \end{cases}$$

Делим одно выражение на другое и выражаем температуру

$$T'_1 = \frac{3T_2^2(T_1 - T_0) + T_0(T_1 - T_2)^2}{3T_2(T_1 - T_0) + (T_1 - T_2)^2} = 275,5\text{K} = 2,5^\circ\text{C}$$

Ответ: $T'_1 = \frac{3T_2^2(T_1 - T_0) + T_0(T_1 - T_2)^2}{3T_2(T_1 - T_0) + (T_1 - T_2)^2} = 275,5\text{K} = 2,5^\circ\text{C}$

5. В Атомной физике, для того чтобы поймать и хранить частицы используются неоднородные электрические поля. Пусть частица массой m и зарядом q движется в вертикальном направлении вдоль оси равномерно заряженного кольца с зарядом Q , к кольцу. Определить максимальную скорость v , которую может иметь частица на расстоянии $5R$ (R – радиус кольца) от центра кольца, при условии, что она не пролетит через него. Влиянием силы тяжести пренебречь. Кольцо считать неподвижным и расположенным горизонтально.

Решение:

Частица не пролетит через кольцо, если в тот момент, когда она находится в центре скорость будет равна нулю. В этой точке потенциальная энергия максимальна.

Найдем потенциальную энергию взаимодействия частицы и заряженного кольца. Разобьем кольцо на элементарные точечные заряды dq тогда потенциальная энергия примет вид $dW = k \frac{q dq}{(R^2 + z^2)^2}$, где z -расстояние до центра кольца.

Чтобы найти полную потенциальную энергию взаимодействия заряженного кольца и заряда q нужно просуммировать. Для этого возьмет интеграл по dq

$$W = \int_0^Q k \frac{q dq}{(R^2 + z^2)^2} = k \frac{qQ}{(R^2 + z^2)^2}.$$

Запишем закон сохранения полной механической энергии

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} + k \frac{qQ}{(R^2 + z^2)^2} &= k \frac{qQ}{R} \\ \frac{mv^2}{2} + k \frac{qQ}{(R^2 + 25R^2)^{1/2}} &= k \frac{qQ}{R} \end{aligned}$$

$$v = \frac{\sqrt{\frac{26kqQ}{R} - \frac{\sqrt{26}kQq}{R}}}{\sqrt{13m}}$$