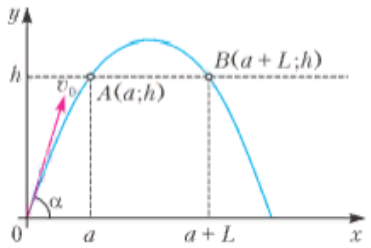
Университетский тур Всероссийской студенческой олимпиады по физике 2021 год

Задача 1

Гольфисту, который находится на расстоянии a от основания приступка, нужно попасть в лунку находящейся на приступке высотой h на расстоянии L от его края. Приступок имеет форму параллипипеда. Под каким минимальным углом к горизонту необходимо послать мячь для гольфа, чтобы он попал в лунку, если его начальная скорость v.



Решение:

Исключив из формул $(1')$ время t, получим уравнение траектории мяча

$$y = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Подставив сюда координаты точек $A(a;h)$ и $B(a+L;h)$, придем к системе уравнений

$$h = atg\alpha - \frac{ga^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$
$$h = (a+L)tg\alpha - \frac{g(a+L)^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}.$$

Приравняв первые части этих уравнений, имеем

$$Ltg\alpha = \frac{g(2aL+L^2)}{2v_0^2\cos^2\alpha}, \text{ или } 2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha = g(2a+L).$$

Объединив это равенство с первым уравнением системы, получаем относительно $tg\alpha$ линейное уравнение

$$a^2tg\alpha = (2a+L)(atg\alpha - h),$$

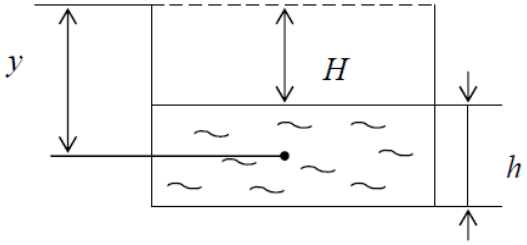
откуда находим

$$tg\alpha = \frac{h}{a}\frac{2a+L}{a+L}, \text{ и } a = arctg\left(\frac{h}{a}\frac{2a+L}{a+L}\right).$$

Задача 2

Насос мощностью 1,5 кВт откачивает воду из скважины в течении 48 мин. Какой объем воды был откачен из скважины на поверхность земли если площадь основания скважины 20 м^2, а в начальный момент времени расстояние от уровня воды до поверхности земли 10 м. Плотность воды 10^3 кг/м^3.

Объем воды равен V=Sh. h-уровень воды в скважине.



Работа A=P/t или работа равна $A = \Delta U$, где U - потенциальная энергия массы воды в скважине $\Delta U = U_2 - U_1 = mgy$.

Масса воды m=ρhS;

y - изменение положения центра масс,

$y = H + \frac{h}{2}$

Работа $A = \rho hSg\left(H + \frac{h}{2}\right)$, выразим h.

$$h^2 + 2hH - \frac{2A}{\rho gS} = 0$$

Подставим числовые значения

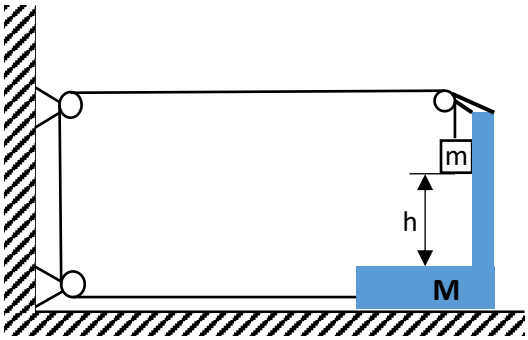
$$h^2 + 20h - 44 = 0$$

Найдем корни уравнения $h \approx 2$ м

Найдем объем V=20*2=40 м^3

Задача 3

Найти время, за которое тело массой m, связанное с рамой массой M нитью, переброшенной через три блока, пройдет высоту h (см. рис.). Если коэффициент трения между телом массой m и рамой равен μ. Трение между рамой и полом отсутствует, нить и блоки считать не весомыми.



Решение

Запишим 2 з.Н в проекциях для тела массой M, на которое действуют силы T, N_1, N, Mg

X: $2T - N_1 = Ma$

Y: $N - Mg - T = 0$

Запишим 2 з.Н в проекциях для тела массой m, на которое действуют силы T, N_1, $F_{тр}$, mg

X: $N_1 = ma$

Y: $mg - T - F_{тр} = ma_1$

Где a- ускорение горизонтального движения, a_1- ускорение вертикального скольжения груза m. Из рисунка видно, что при смещении рамы влево на расстояние x грузик m опустися вниз на расстояние y=2x, что дает $a_1 = 2a$

Решая совместно уравнения получим:

$$a_1 = \frac{4mg}{5m + M + 2\mu m}$$

Т.к. груз m в начальный момент покоился, пожтому время можно найти из уравнения

$h = \frac{a_1 t^2}{2} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{a_1}}$

$$t = \sqrt{\frac{h(5m + M + 2\mu m)}{2mg}}$$

Задача 5

Небольшой теплоизолированный сосуд цилиндрической формы разделен, на две одинаковые полости легкоподвижным подвижным поршнем массой 5 кг и площадью 1,5 дм^2. Полости заполнены воздухом, при этом давление воздуха в сосуде 1,4 кПа, а температура постоянна (см рис. а). Сосуд поместили на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол 45^0, по которой он скользит (см рис. б). Коэффициент трения между трубой и наклонной плоскостью 0,18. Найти отношение $\frac{V_2}{V_1}$ объемов воздуха в сосуде по обе стороны от поршня.

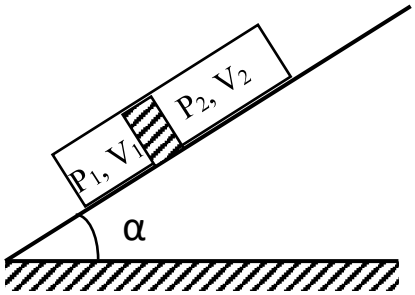


Рис. б

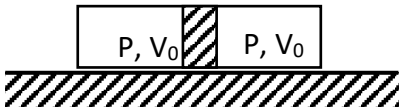


Рис. а

Решение

Запишем 2 З.Н. для трубы

X: $mgsin\alpha - F_{тр} = ma$

Y: $mgcos\alpha - N = 0$

$F_{тр} = kN$

$g(sin\alpha - kcos\alpha) = a$

Опишем положение поршня

$S(P_2 - P_1) + Mgsin\alpha = Ma$

Подставим a

$$\Delta P = \frac{Mgksin\alpha}{S}$$

Запишем уравнение Менделеева-Клапейрона

$P_1V_1 = \nu RT$

$P_2V_2 = \nu RT$

$$\eta = \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$V_1 + V_2 = 2V_0$

$$\frac{V_1}{V_0} + \frac{V_2}{V_0} = 2$$

$V_1 = \frac{2V_0}{\eta+1}$; $V_2 = \frac{2\eta V_0}{\eta+1}$

$P_1V_1 = P_2V_2 = PV_0$; $P_i = \frac{PV_0}{V_i}$

$$\Delta P = PV_0\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = PV_0\left(\frac{\eta+1}{2V_0} - \frac{\eta+1}{2\eta V_0}\right) = \frac{1}{2}P\frac{\eta^2-1}{\eta}$$

$$\eta^2 - 1 - \frac{2\Delta P}{P}\eta = 0;$$

Найдем корни

$$\eta_{1,2} = \frac{\Delta P}{P} \pm \sqrt{\frac{\Delta P^2}{P^2} + 1}$$

Подставим значение ΔP

$$\eta = \frac{Mgk\cos\alpha}{PS} + \sqrt{\left(\frac{Mgk\cos\alpha}{PS}\right)^2 + 1}$$

$$\eta = 1{,}13$$

Задача 4

Платформа массой M движется без трения со скоростью v_1. Навстречу платформе направлен поток β шт/с маленьких шариков массой m и скоростью v_2. Определить через какой промежуток времени платформа остановится, если γ часть шариков абсолютно упруго отражается от платформы, а доля (1-γ) застревает в ней. Масса застрявших шариков много меньше массы платформы.

Решение.

Рассмотрим случай, когда платформа покоится.

За промежуток времени dt в платформу попадает dN= βdt шариков, следовательно, закон сохранения импульса имеет вид

$$Mu - dNmv_2 = M(u + du) + dNm(1 - \gamma)(u + du) + dNm\gamma(2u + v_2)$$

Где Mu – начальный импульс платформы; $dNmv_2$ – начальный импульс потока шариков; $M(u + du)$ – приобретённый импульс платформы; $dNm(1 - \gamma)(u + du)$- импульс шариков, которые застряли в платформе; $dNm\gamma(2u + v_2)$- импульс шариков, которые отразились от платформы.

$$Mu - \beta dtmv_2 = M(u + du) + \beta dtm(1 - \gamma)(u + du) + \beta dtm\gamma(2u + v_2)$$

Откроем скобки и приведем подобные

$$-Mdu = \beta mdt(1 + \gamma)(u + v_2) + \beta dtm(1 - \gamma)du$$

$\beta dtm(1 - \gamma)du$ – пренебрегаем эти членом.

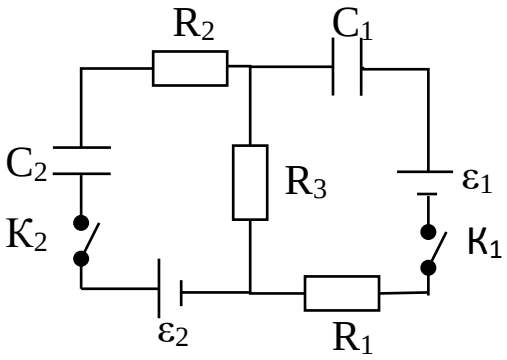
$$-\frac{M}{\beta m(1+\gamma)}\frac{du}{u+v_2} = dt$$

Возьмём интеграл

$$\tau = -\frac{M}{\beta m(1+\gamma)}\int_{v_1}^{0}\frac{du}{u+v_2} = \frac{M}{\beta m(1+\gamma)}\ln(\frac{v_1+v_2}{v_2})$$

Задача 6

Найти для схемы, изображенной на рисунке, ток идущий через сопротивление R_3 и количество теплоты, которое выделится во всей схеме, после одновременного замыкания ключей. Параметры схемы указаны на рисунке. Внутренним сопротивлением ЭДС пренибреч.

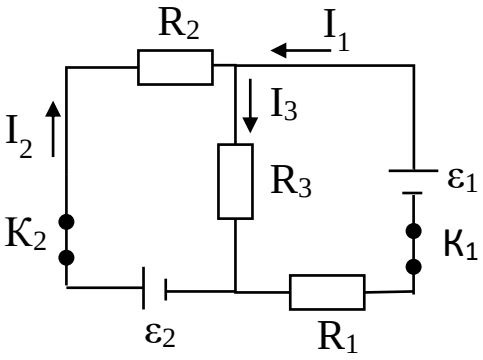


Решения

Составим эквивалентную схему

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = I_1R_1 + I_3R_3 \\ \varepsilon_2 = I_2R_2 + I_3R_3 \\ I_1 + I_2 = I_3 \end{cases}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 R_2 + \varepsilon_2 R_1}{R_2R_3 + R_1R_3 - R_1R_2}$$



После установления стационарного состояния напряжения на конденсаторах будут

$U_{C_1} = \varepsilon_1, U_{C_2} = \varepsilon_2$

Заряды:

$q_1 = U_{C_1}C_1 = C_1\varepsilon_1, q_2 = U_{C_2}C_2 = C_2\varepsilon_2,$

Работа, совершенная источниками:

$$A = q_1\varepsilon_1 + q_2\varepsilon_2 = C_1{\varepsilon_1}^2 + C_2{\varepsilon_2}^2$$

Эта работа равна сумме энергии, запасенной в конденсаторах, и количество теплоты, выделившейся в резисторах. Энергии в конденсаторах:

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1};\ W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2}$$

Энергия, выделившаяся в схеме

$$Q = A - (W_1 + W_2) = \frac{C_1{\varepsilon_1}^2 + C_2{\varepsilon_2}^2}{2}$$