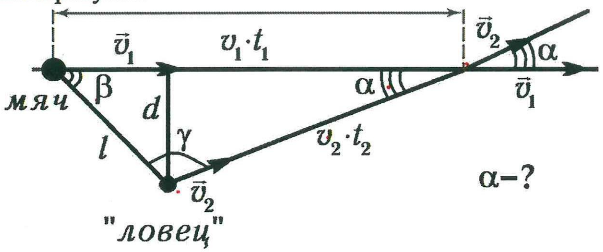
1. (Кинематика 10 баллов) При игре в мяч его бросают горизонтально по прямой со скоростью 25 м/с. Игрок, которому необходимо поймать мяч, находится на расстоянии 5 метров от этой прямой. Расстояние между мячом и «ловцом» в начальный момент времени равно 20 м. Под каким углом к траектории мяча должен бежать «ловец» со скоростью 7 м/с, чтобы успеть его поймать? Изменением высоты траектории мяча пренебречь. Считается, что поимка мяча происходит при пересечении траектории мяча и «ловца». С какой минимальной скоростью может бежать «ловец», чтобы суметь поймать мяч?

Возможное решение:

Изобразим рисунок.



1. Свяжем между собой время полёта мяча и время бега «ловца» до точки пересечения траекторий. По теореме синусов для углов и сторон треугольников:

$$\frac{v_1 t_1}{\sin\gamma} = \frac{v_2 t_2}{\sin\beta}. \qquad (1) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

2. Из прямоугольного треугольника слева:

$$\sin\beta = \frac{d}{l} = 0{,}25, \qquad (2) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

$\beta = \arcsin(0{,}25) = 14{,}48^\circ$.

3. Подставим (2) в (1), и выразим угол γ:

$$\sin\gamma = \frac{dv_1}{lv_2} \cdot \frac{t_1}{t_2}. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Необходимо, чтобы «ловец» оказался в точке пересечения траекторий раньше мяча или одновременно с мячом: $\frac{t_1}{t_2} > 1$. **(1 балл)**

Следовательно,

$$\sin\gamma \ge \frac{d \cdot v_1}{l \cdot v_2} = 0{,}892857. \qquad (3) \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Это будет выполняться, при условии: $63{,}24^\circ \le \gamma \le 116{,}76^\circ$. **(1 балл)**

4. Тогда, угол α может принимать значения:

$$\alpha = 180^\circ - \gamma - \beta, \qquad 48{,}76^\circ \le \alpha \le 102{,}28^\circ. \qquad \textbf{(1 балл)}$$

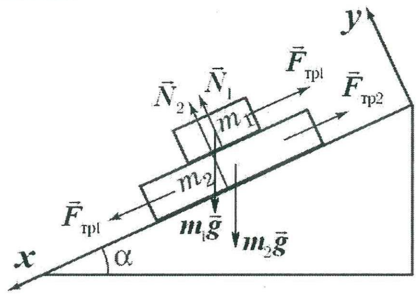
$$\boxed{\text{Ответ: } 48{,}76^\circ \le \alpha \le 102{,}28^\circ}$$

Т.к. «sin» не может превышать значения равного 1, то из (3) следует минимальная скорость «ловца»:

$$\sin\gamma = \frac{d \cdot v_1}{l \cdot v_{2\,\min}} = 1, \qquad v_{2\,\min} = \frac{d \cdot v_1}{l} = 6{,}25 \text{ м/с}. \qquad \textbf{(3 балла)}$$

2.(Динамика 10 баллов) Ящик с ценным грузом находится на ровной поверхности санок, скользящих по горке вниз. Угол наклона горки к горизонту равен α. Масса ящика m_1, масса санок m_2, коэффициент трения ящика о санки μ_1, а санок о наклонную поверхность μ_2 ($\mu_2 > \mu_1$). Определите ускорения ящика и санок.

Возможное решение:



Запишем уравнения динамики для каждого тела в проекциях на координатные оси:

$$0 = N_1 - m_1 g\cos\alpha,$$
$$m_1 a_1 = m_1 g\sin\alpha - F_{тр1},$$
$$0 = N_2 - m_1 g\cos\alpha - m_2 g\cos\alpha, \qquad (1) \qquad \textbf{(2 балла)}$$
$$m_2 a_2 = m_2 g\sin\alpha - F_{тр2} + F_{тр1}.$$

При этом

$$F_{тр1} \le \mu_1 m_1 g\cos\alpha, \quad F_{тр2} \le \mu_2 (m_1 + m_2) g\cos\alpha.$$

Знак равно соответствует скольжению между соприкасающимися поверхностями, а знак меньше – отсутствию скольжения (трение покоя).

(1 балл)

По условию, $\mu_2 > \mu_1$. Будем считать, что $a_2 \ne 0$, а $a_1 \ge a_2$. Тогда,

$$F_{тр1} = \mu_1 m_1 g\cos\alpha, \qquad F_{тр2} = \mu_2 (m_1 + m_2) g\cos\alpha.$$

Решив систему уравнений (1) (второе и четвёртое уравнения)

$$a_1 = g(\sin\alpha - \mu_1\cos\alpha),$$

$$a_2 = g\left(\sin\alpha - \mu_2\left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)\cos\alpha + \frac{m_1}{m_2}\mu_1\cos\alpha\right) =$$

(2 балла)

$$= g\left(\sin\alpha - \mu_2\cos\alpha + \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)\cos\alpha\right).$$

Определим, при каких углах наклона горки это возможно.

1. Если $tg\alpha > \mu_2 + \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)$, то $a_1 > a_2 > 0$. **(2 балла)**

2. Если угол будет меньше, то $a_2 = 0$ (санки покоятся). Ящик скользит относительно поверхности санок при условии $tg\alpha > \mu_1$. Т.е. $\mu_1 < tg\alpha < \mu_2 + \frac{m_1}{m_2}(\mu_1 - \mu_2)$, то $a_1 > a_2 = 0$. **(2 балла)**

3. Если $tg\alpha < \mu_1$, то движения не будет $a_1 = a_2 = 0$. **(1 балл)**

Ответ: три перечисленных выше случая

3.(Работа. Законы сохранения 10 баллов) На краю свободно вращающейся без трения платформы (однородного диска) стоят N человек. Начальная угловая скорость вращения платформы равна ω_1, радиус R, момент инерции платформы (без людей) равен I. Массы у всех людей одинаковы и равны m. В какой-то момент времени люди одновременно с одинаковой скоростью начинают идти к центру платформы и одновременно останавливаются (не дойдя до центра). После этого угловая скорость платформы становится равной ω_2. Определите, какую работу совершил каждый человек.

Возможное решение:

Систему платформа $+ N$ человек можно считать изолированной (замкнутой), т.к. на неё не действуют никакие внешние силы (моменты сил). Следовательно, мы можем воспользоваться законом сохранения момента импульса, относительно центра платформы и связью между работой и полной механической энергией системы. **(1 балл)**

Начальный момент инерции всей системы: $I_1 = I + N \cdot m \cdot R^2$.

Конечный момент инерции системы: $I_2 = I + N \cdot m \cdot r^2$, где r – расстояние людей от центра платформы после остановки. **(2 балла)**

Закон сохранения момента импульса:

$$\omega_1\left(I + NmR^2\right) = \omega_2\left(I + Nmr^2\right). \qquad (1) \quad \textbf{(2 балла)}$$

Работа совершённая совместно всеми людьми равна изменению кинетической энергии вращения системы:

$$\frac{\left(I + Nmr^2\right)\omega_2^2}{2} - \frac{\left(I + NmR^2\right)\omega_1^2}{2} = A = A_1 N. \qquad (2) \quad \textbf{(2 балла)}$$

Решая совместно (1) и (2), получим:

$$\left(I + Nmr^2\right) = \frac{\omega_1}{\omega_2}\left(I + NmR^2\right)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2}\left(I + NmR^2\right)\frac{\omega_2^2}{2} - \left(I + NmR^2\right)\frac{\omega_1^2}{2} =$$

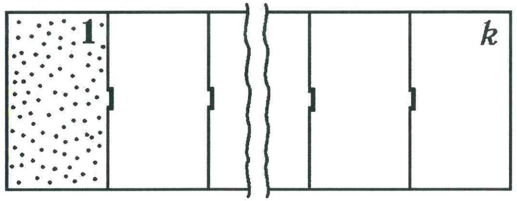
$$= \frac{\omega_1\left(I + NmR^2\right)}{2}\left(\omega_2 - \omega_1\right) = A_1 N. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Выразим работу одного человека:

$$A_1 = \frac{\omega_1\left(\omega_2 - \omega_1\right)}{2}\left(\frac{I}{N} + mR^2\right). \qquad \textbf{(1 балл)}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } A_1 = \frac{\omega_1\left(\omega_2 - \omega_1\right)}{2}\left(\frac{I}{N} + mR^2\right).}$$

4. (МФиТД, 10 баллов) Длинный горизонтальный изолированный сосуд разделён на k равных частей непроницаемыми перегородками. В каждой перегородке имеются одинаковые небольшие отверстия закрытые клапанами. В одной из крайних частей (будем считать её номер 1) содержится смесь двух газов с известными молярными массами μ_1 и μ_2. При этом, число молекул первого и второго газов одинаково. В некоторый момент клапаны во всех перегородках открывают одновременно на короткое время (много меньшее времени установления равновесия), а затем закрывают. Определите теоретически возможное отношение числа молекул первого и второго газов в последней (k-той) части сосуда после закрытия клапанов. Температуру в ходе процесса считать постоянной.



Возможное решение:

Средняя квадратичная скорость: $v_{кв} = \sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}$. **(2 балла)**

Число ударов о стенку площадью S за некоторое время:

$$dN = \frac{1}{6} \cdot n \cdot S \cdot v_{кв} \cdot dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{V_0} \cdot S \cdot v_{кв} \cdot dt, \qquad \textbf{(2 балла)}$$

где N – число молекул в данной части сосуда; V_0 – объём одной части сосуда; S – площадь отверстия. Тогда, число молекул, которые окажутся в следующей части сосуда, перейдя из предыдущей части за промежуток времени dt:

$$d\,N_i = dN_{i-1} = \frac{1}{6} \cdot \frac{N_{i-1}}{V_0} \cdot S \cdot \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \cdot dt. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Отношение числа частиц первого и второго газа в i-той части сосуда:

$$\frac{N_{1i}}{N_{2i}} = \frac{N_{1(i-1)}}{N_{2(i-1)}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}. \qquad \textbf{(2 балла)}$$

Подставим номера 2, 3, 4 частей, а потом обобщим результат.

– во второй части (i=2): $\dfrac{N_{12}}{N_{22}} = \dfrac{N_{11}}{N_{21}} \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}} = \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}$, т.к. по условию $N_{11} = N_{21}$;

– в третьей части (i=3): $\dfrac{N_{13}}{N_{23}} = \dfrac{N_{12}}{N_{22}} \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}} = \left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^2$;

– в четвёртой части (i=4): $\dfrac{N_{14}}{N_{24}} = \dfrac{N_{13}}{N_{23}} \sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}} = \left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^3$;

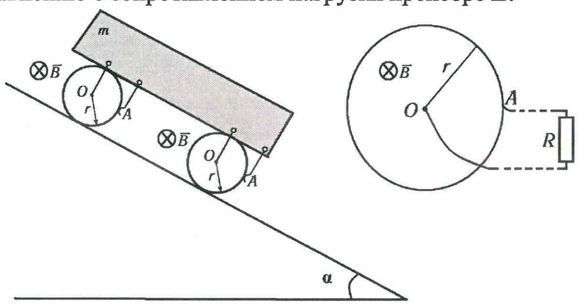
– в k-той части (i=k):

$$\frac{N_{1k}}{N_{2k}} = \frac{N_{1(k-1)}}{N_{2(k-1)}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^{(k-1)} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{(k-1)}{2}}.$$

(2 балла)

Ответ: $\boxed{\dfrac{N_{1k}}{N_{2k}} = \left(\sqrt{\dfrac{\mu_2}{\mu_1}}\right)^{(k-1)} = \left(\dfrac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{\frac{(k-1)}{2}}.}$

5. (Электромагнетизм, 10 баллов) Студенты-изобретатели придумали игрушечную установку генерирующую электроэнергию: Тележка массы ***m*** располагается на четырёх лёгких проводящих сплошных дисках радиуса ***r***. Передняя и задняя оси тележки выполнены из непроводящего материала. К оси каждого диска, в точке *O*, подключен контакт электрической схемы, содержащей нагрузку сопротивлением ***R***. Второй контакт схемы соединён в точке *A* щеткой, скользящей без трения и без прерывания контакта с поверхностью диска. Вся система находится в однородном горизонтальном магнитном поле с индукцией ***B***. Под действием силы тяжести тележка начинает катиться без проскальзывания по рельсам, расположенным под углом ***α*** к горизонту. Объясните, почему тележка через некоторое время начнёт катиться с постоянной скоростью. Определите установившуюся скорость движения тележки. Изобразите такую эквивалентную электрическую схему подключения нагрузки, при которой установившаяся скорость тележки будет иметь максимально возможное значение. Трением в осях дисков и сопротивлением дисков по сравнению с сопротивлением нагрузки пренебречь.



Возможное решение:

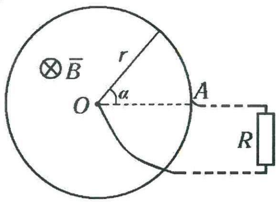


Рисунок 1.

Пояснения, почему блок через некоторое время начнёт вращаться с постоянной скоростью (ключевые слова выделены жирно):

При вращении проводящих дисков в магнитном поле, свободные заряды в них движутся вместе с дисками. В данном случае **вращение дисков происходит по часовой стрелке**, следовательно, и заряды движутся по окружности по часовой стрелке. На движущиеся заряды в магнитном поле действует **сила Лоренца: на положительные – к краю диска (к т. *A*), на отрицательные – к центру (к т. *O*)**. Возникает разность потенциалов между точками *O* и *A*. В следствии чего в электрической цепи появляется ток, направленный от т. *A* к т. *O*. А внутри дисков ток от т. *O* к т. *A*. **На заряды движущиеся от т. *O* к т. *A* будет действовать со стороны магнитного поля сила Лоренца, направленная по касательной к окружности против часовой стрелки. Эта сила будет возрастать по мере увеличения силы тока от т. *O* к т. *A* внутри диска. Момент этой силы будет препятствовать, дальнейшему нарастанию скорости вращения диска.** **(1 балл)**

Решение:

ЭДС индукции, возникающая при вращении одного диска, определяется из закона Фарадея:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -B\frac{dS}{dt}, \qquad (1) \quad \textbf{(1 балл)}$$

где изменение площади за малый промежуток времени определяется через угол поворота диска:

$$dS = \frac{r^2 \cdot d\alpha}{2}. \qquad (2) \quad \textbf{(0,5 балла)}$$

Изменение угла поворота определяется:

$$d\alpha = \omega(t)dt \qquad (3) \quad \textbf{(0,5 балла)}$$

Подставляя (3) в (2), (2) в (1), получим:

$$|\varepsilon_i| = \frac{B\omega(t)\cdot r^2}{2}.$$

***если последняя формула не выведена, а записана сразу, то 1 балл вместо двух.**

****если последняя формула получена через $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$ и $\Phi = BS = \frac{Br^2\omega(t)}{2}$, то 2 балла.**

В ситуации, когда скорость вращения блока установилась и остаётся постоянной она достигает максимума:

$$|\varepsilon_i| = \frac{B\cdot\omega_{\max}\cdot r^2}{2}. \qquad (4) \quad \textbf{(1 балл)}$$

<u>Определим максимальную скорость.</u>

Эквивалентная схема подключения нагрузки для достижения максимальной скорости:

Наибольшее значение установившейся скорости тележки будет в том случае, когда момент силы Ампера (сама сила Ампера, сила индукционного тока, полная ЭДС) достигает предельного значения дольше (медленнее).

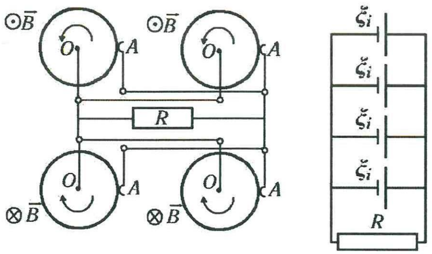


Рисунок 2.

Следовательно, все диски необходимо включить в электрическую цепь параллельно. Т.е. необходимо т. O всех дисков соединить с одним контактом нагрузки, а т. A всех дисков с другим контактом. Тогда, полная ЭДС будет равна ЭДС индукции, возникающей при вращении одного диска:

$$\varepsilon = \varepsilon_i . \qquad \textbf{(0,5 балла)}$$

По закону сохранения энергии (трения нет), в установившемся режиме уменьшение потенциальной энергии тележки массой m идет на работу против момента силы Ампера и выделение Джоулевой теплоты в нагрузке (кинетическая энергия не меняется):

$$mg\Delta h = \frac{\varepsilon^2}{R}t + A_{MFA} = \frac{\varepsilon_i^2}{R}t + +A_{MFA}. \qquad (5) \qquad \textbf{(0,5 балла)}$$

С учётом, того что

– путь, который проходит тележка вдоль наклонной плоскости и высота, на которую опускается тележка за некоторый промежуток времени, связаны соотношением:

$$\Delta h = l \cdot \sin\alpha , \qquad (6) \qquad \textbf{(0,5 балла)}$$

– скорость движения тележки связана с угловой скоростью вращения дисков:

$$\upsilon_{\max} = \omega_{\max} \cdot r , \qquad (7) \qquad \textbf{(0,5 балла)}$$

– путь, пройденный вдоль наклонной плоскости:

$$l = \upsilon_{\max} \cdot t = \omega_{\max} \cdot r \cdot t . \qquad (8)$$

– работа против момента силы Ампера:

$$M_{FA} = IB\int_0^r r dr = \frac{IBr^2}{2} = const , \qquad \varphi = \omega_{\max} \cdot t ,$$

$$A_{MFA} = M_{FA} \cdot \varphi = \frac{IBr^2 \cdot \omega_{\max}}{2} \cdot t = \frac{\varepsilon_i Br^2 \cdot \omega_{\max}}{2R} \cdot t = \qquad (9) \qquad \textbf{(0,5 балла)}$$

$$= \frac{B \cdot \omega_{\max} \cdot r^2}{2} \cdot \frac{Br^2 \cdot \omega_{\max}}{2R} \cdot t = \frac{B^2 \cdot \omega_{\max}^2 \cdot r^4}{4R} \cdot t .$$

Подставляя (4), (6)–(9) в (5), получим:

$$mgl \cdot \sin\alpha = mg\omega_{\max} \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot t = \frac{B^2 \cdot \omega_{\max}^2 \cdot r^4}{4R} \cdot t + \frac{B^2 \cdot \omega_{\max}^2 \cdot r^4}{4R} \cdot t ,$$

$$\omega_{\max} = 2 \cdot \frac{mgR \cdot \sin\alpha}{B^2 \cdot r^3}, \quad \upsilon_{\max} = 2 \cdot \frac{mgR \cdot \sin\alpha}{B^2 \cdot r^2}. \qquad (10) \qquad \textbf{(0,5 балла)}$$

Проверим, не окажется ли установившаяся скорость движения тележки при последовательном соединении дисков больше полученного выражения (10).

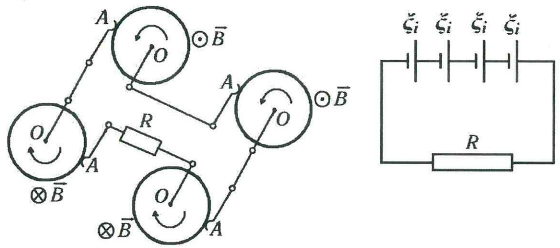


Рисунок 3.

Пусть, диски соединены, как показано на рисунке 3, т.е. последовательно (т. O одного диска с т. A следующего). Тогда, $\varepsilon = 4\varepsilon_i$.

По закону сохранения энергии (трения нет), в установившемся режиме уменьшение потенциальной энергии тележки массой m идет на работу против момента силы Ампера и выделение джоулевой теплоты в нагрузке (кинетическая энергия не меняется):

$$mg\Delta h = \frac{\varepsilon^2}{R}t + A_{MFA} = \frac{16 \cdot \varepsilon_i^2}{R}t + A_{MFA}. \qquad (5') \qquad \textbf{(1 балл)}$$

С учётом, подстановки (4), (6)–(9) в (5'), получим:

$$mgl \cdot \sin\alpha = mg\omega_{\max} \cdot r \cdot \sin\alpha \cdot t = \frac{16 \cdot B^2 \cdot \omega_{\max}^2 \cdot r^4}{4R} \cdot t + \frac{B^2 \cdot \omega_{\max}^2 \cdot r^4}{4R} \cdot t ,$$

$$\omega'_{\max} = \frac{4}{17} \cdot \frac{mgR \cdot \sin\alpha}{B^2 \cdot r^3}, \qquad \upsilon'_{\max} = \frac{4}{17} \cdot \frac{mgR \cdot \sin\alpha}{B^2 \cdot r^2} \qquad (10') \qquad \textbf{(1 балл)}$$

Вывод: Из сравнения (10) и (10') видно, что в случае последовательного включения всех дисков установившаяся скорость будет в 8,5 раз меньше, чем при параллельном подключении. **(1 балл)**

Ответ: Диски должны быть соединены параллельно, как показано на рисунке.2. Максимальное значение установившейся скорости тележки равно:

$$\upsilon_{\max} = 2 \cdot \frac{mgR \cdot \sin\alpha}{B^2 \cdot r^2}.$$