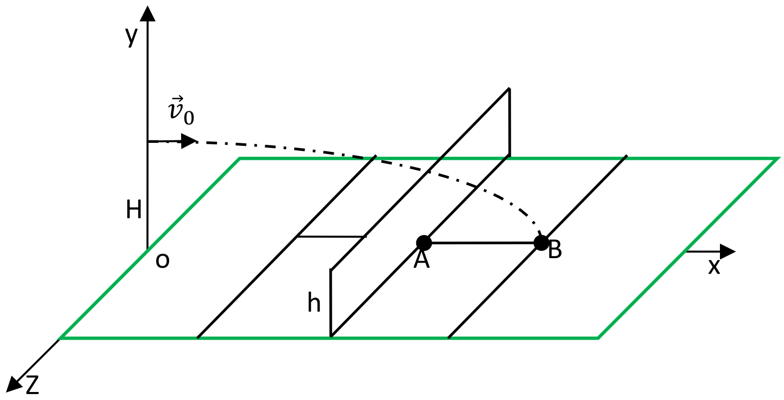
Задача 1 *Теннисисту необходимо перекинуть маленький упругий теннисный мяч через сетку, которая находится на расстоянии 15 м от него так, чтобы мяч приземлился не дальше 7 метров за сеткой. Какую начальную горизонтальную скорость нужно сообщить ракетки, если «рост теннисиста» 2.5 м, а высота сетки 0.9 м.*

Решение



H – рост теннисиста; h - высота сетки; OA – расстояние от теннисиста до сетки; AB – расстояние от сетки до точки; $\vec{v}_0$- начальная скорость полета теннисного мяча.

1. Зависимость координат полета меча от времени имеет вид

$$\begin{cases} x = v_0 t, \\ y = H - \frac{gt^2}{2} \end{cases} (1)$$

2. Мяч должен пролететь над сеткой. Найдем время, за которое мяч долетит до сетки. Координаты (1) примут вид

$$\begin{cases} x_1 = v_0 t_1, \\ h = H - \frac{gt_1^2}{2} \end{cases} (2)$$

Из (2) $t_1 = \frac{x_1}{v_0}$, где x_1= OA.

$$h = H - \frac{gx_1^2}{2v_0^2} \quad (3)$$

3. Выразим v_0 из (3)

$$v_0 = x_1\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}} (4)$$

4. Расчитаем значение скорости

$$v_0 = 15\sqrt{\frac{9,8}{2(2,5-0,9)}} = 26,3 \text{ м/с} \ (5)$$

Тк удар абсолютно упругий $u = \frac{v_0}{2}$

5. Найдем место приземления мяча x_2 за сеткой. Для этого найдем время полета меча. Координаты (1) примут вид

$$\begin{cases} x_2 = v_0 t_2, \\ 0 = H - \frac{g t_2^2}{2} \end{cases} (6)$$

6. Из (6) $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} \rightarrow x_2 = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

7. Рассчитаем путь, который пролетел мяч вдоль оси OX

$x_2 = 26{,}3\sqrt{\frac{2*2{,}5}{9{,}8}} = 18.75$ м.

8. Проверим удовлетворяет ли наш ответ условию задачи

$x_2 - x_1 = 18.75 - 15 = 3.75$ м.

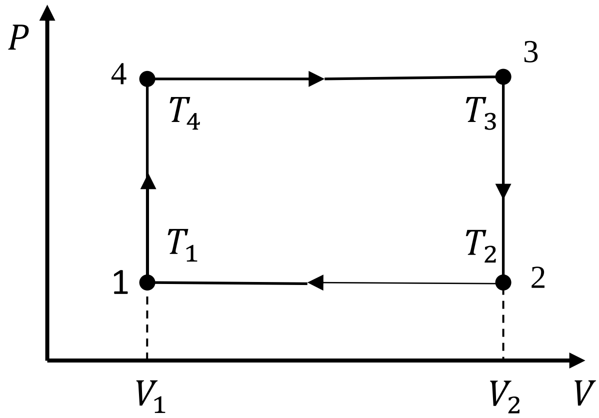
Задача 2 *Над газом, взятым в количестве* $\nu = 1$ *моль, совершают замкнутый процесс, который изображен на рисунке. Определить работу, совершаемую газом за цикл, если известна максимальная температура* $403^0 C$ *и минимальная температура* $51^0 C$.

Решение

1. Определим из каких процессов состоит цикл.

1-4 и 3-2 это графики изохоры.

4-3 и 2-1 это графики изобара.



2. Найдем отношение объёмов из уравнения изобары 2-1

   $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ т.к $T_1 < T_2 \rightarrow V_1 < V_2$

3. Перерисуем процесс в координатах PV
4. Определим работу на каждом участке цикла

$$A_{4\rightarrow3} = p_2(V_2 - V_1) = R(T_3 - T_4)$$
$$A_{3\rightarrow2} = 0$$
$$A_{2\rightarrow1} = p_1(V_1 - V_2) = R(T_1 - T_2)$$
$$A_{1\rightarrow4} = 0$$

5. Работа за цикл. Из графика $T_4 = T_2$

$$A = A_{4\rightarrow3} + A_{2\rightarrow1} = R(T_3 + T_1 - 2T_2)$$

6. Выразим температуру T_2 через T_3. Запишем уравнение изохор

$$\frac{p_2}{T_3} = \frac{p_1}{T_2}, \quad \frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T_1}, \quad \Rightarrow \quad T_2 = \sqrt{T_1 T_3}.$$

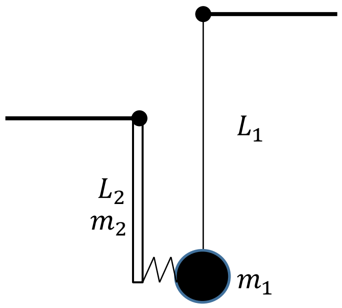
7. Подставим T_2 в полную работу

$$A = R\left(T_1 + T_3 - 2\sqrt{T_1 T_3}\right) = R(\sqrt{T_3} - \sqrt{T_1})^2$$

8. Подставим значение температур в работу. Т.к $T_1 = T_{min} = 324$ K и $T_3 = T_{max} = 676$ K

$$A = 8{,}31 * \left(\sqrt{676} - \sqrt{324}\right)^2 = 531{,}84 \text{ Дж}$$

Задача 3 Стержень, прикрепленный к шарниру за верхний конец, соединен сжатой невесомой пружиной с небольшим шаром, подвешенным на невесомой нерастяжимой нити, как показано на рисунке. На какой угол отклонится шар после разжимания пружины, если стержень отклонился на 90^0? Масса стержня m_1 длина L_1. Масса шара m_2 длина L_2. Пружина не влияет на процесс разжимания.



Решение

Закон СМИ

$m_1 L_1^2 \frac{v}{L_1} = I\omega$, где $I = \frac{m_2 L_2^2}{3} \rightarrow \ v = \frac{m_2 L_2^2 \omega}{3 m_1 L_1}$ (1)

Закон СЭ для стержня

$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{m_2 L_2 g}{2} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L_2}}$ *(2)*

Закон СЭ для шара

$\frac{m_1 v^2}{2} = m_1 h g$, где $h = L_1(1 - \cos\alpha) \rightarrow$

$\cos\alpha = 1 - \frac{v^2}{2gL_1}$, *подставим (1) и (2)*

$$\cos\alpha = 1 - \frac{m_2^2 L_2^3}{6 m_1^2 L_1^3}$$

Задача 4 *Однородный резиновый шнур прикреплен к стене за один из концов, за второй конец шнур растягивают горизонтально с постоянной скоростью V. В момент времени, когда длина шнура была равна l, со стены на него заползает жучок и начинает ползти по шнуру с постоянной скоростью υ. За какое время жучок доползет до второго конца шнура?* ***Примечание****: для решения дифференциального уравнения типа* $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + c$*, где* c *– некоторая константа, рекомендуется сделать замену* $z = \frac{x}{t}$*, что позволит свести это уравнение к виду* $t\frac{dz}{dt} = c$*.*

Решение:

Скорость перемещения жука по шнуру определяется как его собственной скоростью движения υ, так и скоростью растяжения шнура $\frac{dl'}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon + \frac{dl'}{dt}$$

Из рисунка 1 видно, что удлинение dl' шнура в точке $x = \eta(l + Vt)$ положения жука в момент времени t (за η обозначено перемещение жука в единицах относительно текущей длины шнура) будет определяться через общее удлинение шнура dl как

$$dl' = \eta \cdot dl.$$

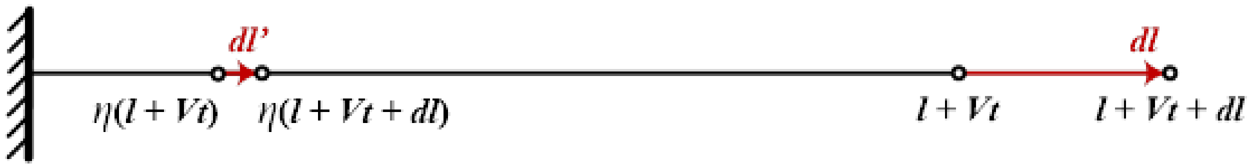


Рис. 1. Связь между удлинением dl' шнура в точке $\eta(l + Vt)$ и общим удлинением шнура dl за время dt.

Тогда получаем

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon + \eta\frac{dl}{dt} = \upsilon + \frac{x}{l + Vt}V$$

Для приведения уравнения к виду типа $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{t} + c$ из **Примечания** к задаче сделаем замену $t' = l + Vt$, получим

$$\frac{Vdx}{dt'} = \upsilon + \frac{x}{t'}V$$

или

$$\frac{dx}{dt'} = \frac{x}{t'} + \frac{\upsilon}{V}$$

С учетом **Примечания** к задаче получим

$$t'\frac{dz}{dt'} = \frac{v}{V}$$

где $z = \frac{x}{t'}$. Решая это дифференциальное уравнение и подставляя интересующие нас пределы для *t'* от *l* до (l + *V*τ), где τ – все время движения жука от одного конца шнура до другого, и для $z = \frac{x}{l + Vt}$ от 0 до 1, получаем уравнение для нахождения величины τ:

$$\int_0^1 dz = \int_l^{l+V\tau} \frac{v}{V}\frac{dt'}{t'}$$

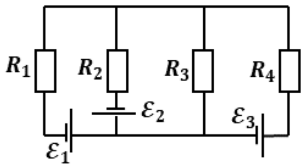
$$1 = \frac{v}{V} ln\left(1 + \frac{V}{l}\tau\right)$$

Из последнего уравнения получаем

$$\tau = \frac{l}{V}\left(e^{V/v} - 1\right)$$

Ответ: $\tau = \frac{l}{V}\left(e^{V/v} - 1\right)$

Задача 5 *Электрическая цепь состоит набора сопротивлений* $R_1 = 5$ *Ом,* $R_2 = 10$ *Ом,* R_3, $R_4 = 15$ *Ом и трех источников тока* $\mathcal{E}_1 = 17$ *В,* $\mathcal{E}_2 = 13$ *В,* $\mathcal{E}_3 = 19$ *В как изображено на рисунке. При каком значении* R_3 *тепловые потери на этом сопротивлении будут максимальны?*



Решение:

$$P_3 = {I_3}^2 R_3$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_{экв}}{r_{экв} + R_3}$$

$$(P_3)' = 0$$

$$\left(\frac{{\mathcal{E}_{экв}}^2 R_3}{(r_{экв} + R_3)^2}\right)' = 0$$

$$R_3 = r_{экв}$$

$${r_{экв}}^{-1} = {R_1}^{-1} + {R_2}^{-1} + {R_4}^{-1}$$

$$R_3 = 2{,}5 \text{ Ом}$$