Тема 7. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

7.1. Причины электрического тока.
7.2. Сила тока, плотность тока, уравнение непрерывности.
7.3. Сторонние силы и ЭДС.
7.4. Закон Ома для однородного и неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи.
7.5. Закон Ома в дифференциальной форме
7.6. Закон Джоуля-Ленца. Работа и мощность тока.
7.7. КПД источника тока.
7.8. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

7.1. Причины электрического тока

Заряженные объекты являются причиной не только электростатического поля, но еще и электрического тока. В этих двух явлениях есть существенное отличие. Для возникновения электростатического поля требуются неподвижные, каким-то образом зафиксированные в пространстве заряды, а для возникновения электрического тока, напротив, требуется наличие свободных, не закрепленных заряженных частиц, которые в электростатическом поле неподвижных зарядов приходят в состояние *упорядоченного движения вдоль силовых линий поля*. Это движение и есть *электрический ток*.

Электрический ток – упорядоченное (направленное) движение электрических зарядов. Различают:

Ток проводимости (ток в проводниках) – движение микрозарядов в макротеле.

Конвекционный ток – движение макроскопических заряженных тел в пространстве.

Ток в вакууме – движение микрозарядов в вакууме

Если внутри проводника напряженность электрического поля $\vec{E}$ отлична от нуля, то в проводнике возникает направленное движение зарядов, т.е., электрический ток. В металлах могут свободно перемещаться только электроны. Поэтому, электрический ток в металлах есть движение электронов проводимости. В проводящих растворах не имеется свободных электронов, а подвижными заряженными частицами являются ионы. В газах могут существовать в подвижном состоянии ионы и электроны. Таким образом, для протекания тока необходимо наличие в данном теле (или в данной среде) заряженных частиц, которые могут перемещаться в пределах всего тела. Такие частицы называются носителями тока. Ими могут быть электроны, ионы, и даже макроскопические заряженные частицы (пылинки, капельки).

Носители тока принимают участие в молекулярном тепловом движении и, следовательно, движутся с некоторой скоростью $\vec{V}$ и в отсутствие поля. Но в этом случае через произвольную площадку, мысленно проведенную в теле, проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей заряда любого знака, так что ток равен нулю.

При включении поля на хаотическое движение носителей заряда со скоростью $\vec{\upsilon}$ накладывается упорядоченное движение со скоростью $\vec{\upsilon}_{др}$ (скорость направленного движения носителей тока часто называют дрейфовой скоростью $\vec{\upsilon}_{др}$). Таким образом, скорость носителей будет $\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}_{др}$. Так как среднее значение $\vec{V}$ равно нулю, то средняя скорость носителей равна $<\vec{\upsilon}_{др}>$, т.е.:

$$<\vec{\upsilon}+\vec{\upsilon}_{др}> = <\vec{\upsilon}> + <\vec{\upsilon}_{др}> = <\vec{\upsilon}_{др}>=\vec{\upsilon}_{др}.$$

Из сказанного следует, что электрический ток можно определить как упорядоченное движение электрических зарядов.

Следует обратить внимание на то, что всякое изменение электрического поля в проводнике практически одновременно приводит к появлению в нем электрического тока. Как указывалось ранее носители зарядов (электроны в металлах) совершают сложное движение:

1) хаотическое движение со средней скоростью $\vec{\upsilon} \sim \sqrt{kT}$ ($\vec{\upsilon}$ порядка $10^3 - 10^4$ м/с)
2) направленное движение под действием электрического поля со средней скоростью $\vec{\upsilon}_{др} \sim E$ ($\vec{\upsilon}_{др}$ порядка доли мм/с)

Таким образом, средняя скорость направленного движения электронов много меньше средней скорости их хаотического движения. Незначительная средняя скорость направленного движения объясняется их частыми столкновениями с ионами кристаллической решетки. В то же время всякое изменение электрического поля передается вдоль проводников со скоростью, равной скорости распространения электромагнитной волны – ($3\cdot10^8$ м /с). Поэтому движение электронов под действием внешнего поля возникает на всем протяжении провода практически одновременно с подачей сигнала.

Распределение напряженности E и потенциала φ **электростатического поля** связано с плотностью распределения зарядов ρ в пространстве уравнением Пуассона:

$$\nabla E = \frac{1}{\varepsilon}\rho, \tag{1}$$

и

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon}\rho, \tag{2}$$

где $\rho = \dfrac{\partial q}{\partial V}$ – объемная плотность заряда.

Если заряды неподвижны, то есть распределение зарядов в пространстве стационарно, то ρ не зависит от времени, в результате чего и E, а значит и φ являются функциями только координат, но не времени. Поэтому поле и называется *электростатическим*.

При движении зарядов нарушается их равновесное распределение. Следовательно, поверхность проводника уже не является эквипотенциальной и вектор напряженности электрического поля **E** не направлен перпендикулярно поверхности, так как для движения зарядов необходимо, чтобы на поверхности $E_\tau \neq 0$. По этой причине внутри проводника существует электрическое поле, которое равно нулю только в случае равновесного распределения зарядов на поверхности проводника.

Наличие свободных зарядов приводит к тому, что ρ становится функцией времени, что порождает изменение со временем и характеристик электрического поля, появляется ***электрический ток***. Поле перестает быть электростатическим.

Условия появления и существования тока проводимости:

1. Наличие в среде свободных носителей заряда, т.е. заряженных частиц, способных перемещаться. В металле это электроны проводимости; в электролитах – положительные и отрицательные ионы; в газах – положительные, отрицательные ионы и электроны.

2. Наличие в среде электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение электрических зарядов. Для того, чтобы ток был длительным, энергия электрического поля должна все время пополняться, т.е. нужен ***источник электрической энергии*** – устройство, в котором происходит преобразование какого-либо вида энергии в энергию электрического поля.

7.2. Характеристики электрического тока

1. Сила тока.

Количественной мерой тока служит сила тока I, т.е. заряд, перенесенный сквозь рассматриваемую поверхность S (*или через поперечное сечение проводника*) *в единицу времени, т.е.*

$$I = \frac{\partial q}{\partial t}. \tag{3}$$

Если движение свободных зарядов таково, что оно не приводит к перераспределению зарядов в пространстве, то есть к изменению со временем плотности зарядов ρ, то в этом частном случае электрическое поле – снова статическое. Этот частный случай есть случай *постоянного тока.*

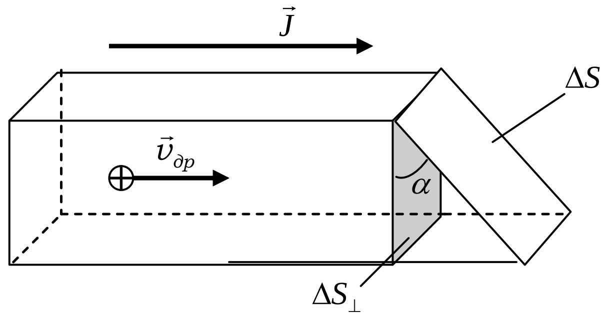
Ток, не изменяющийся по величине со временем, называется ***постоянным током***

$$I = \frac{q}{t},$$

отсюда видна размерность силы тока в СИ: $1\text{А} = \frac{\text{Кл}}{\text{с}}$.

2. Плотность тока

Плотность тока равна величине заряда, проходящего в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной к направлению движения заряда: $j = \frac{\partial q}{\partial t \partial S_\perp}$, или $j = \frac{\partial I}{\partial S_\perp}$, где $\partial S_\perp$ - площадка перпендикулярная направлению переноса заряда.



В отличие от силы тока, которая есть величина скалярная и направления не имеет, *плотность тока – это вектор*.

Выделим внутри проводника площадку $\Delta S_\perp$, расположенную перпендикулярно к линиям тока, а значит, и перпендикулярно к направлению скорости $\vec{\upsilon}_{\text{др}}$ направленного движения частиц. Построим на этой площадке прямоугольный параллелепипед с стороной, равной скорости движения частиц $\upsilon_{\text{др}}\Delta t$. Тогда число частиц, которые пройдут через рассматриваемую площадку $\Delta S_\perp$ за промежуток времени Δt, будет равно числу частиц, заключенных внутри параллелепипеда. Если n – концентрация заряженных частиц, то число частиц внутри параллелепипеда $n\upsilon_{\text{др}}\Delta t\Delta S_{\perp}$, а переносимый заряд есть $en\upsilon_{\text{др}}\Delta t\Delta S_{\perp} = \Delta q$, где e заряд одной частицы (например электрона). Величина плотности тока, таким образом, будет равна:

$$j = \frac{\Delta q}{\Delta S_{\perp}\Delta t} = en\upsilon_{\text{др}}, \quad \text{или} \quad \vec{j} = en\vec{\upsilon}_{\text{др}}. \tag{4}$$

Ясно, что плотность тока связана с плотностью свободных зарядов ρ и с дрейфовой скоростью их движения $\vec{\upsilon}_{\text{др}}$:

$$\vec{j} = \rho\vec{\upsilon}_{\text{др}}.$$

Поскольку скорость $\vec{\upsilon}_{\text{др}}$ характеризует движение заряженных частиц в данной точке, то и вектор плотности тока $\vec{j}$ определяет электрический ток в данной точке проводника. Вектор плотности тока ***j*** вводится для характеристики распределения заряда по сечению проводника.

3. Связь между силой тока и плотностью тока

По определению плотность тока равна $j = \dfrac{\partial I}{\partial S_{\perp}}$, тогда $dI = jdS_{\perp}$. Если площадка dS не перпендикулярна направлению скорости движения носителей тока (как показано на рисунке), то $dS_{\perp} = dS\cos\alpha$, а $dI = jdS_{\perp} = jdS\cos\alpha$.

Полученное выражение можно записать в виде $dI = (\vec{j}d\vec{S})$ - сила тока это поток вектора плотности тока через площадку dS. Тогда сила тока через площадку площадью S равна:

$$I = \int_s (\vec{j}\partial\vec{S}.) \tag{5}$$

Единица плотности тока А/м^2. Плотность тока есть более подробная характеристика тока, чем сила тока I. Плотность тока характеризует ток локально, в каждой точке пространства, а I – это интегральная характеристика, привязанная не к точке, а к области пространства, в которой протекает ток.

За направление вектора $\vec{j}$ *принимают направление вектора* $\vec{\upsilon}_{\text{др}}$ ***положительных*** *носителей зарядов*. Если носителями являются как положительные, так и отрицательные заряды, то плотность тока определяется формулой:

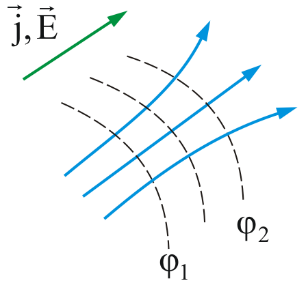
$$\vec{j} = q_+ n_+ \vec{\upsilon}_{\text{др}+} + q_- n_- \vec{\upsilon}_{\text{др}-}, \qquad (6)$$

где $q_+ n_+$ и $q_- n_-$ – объемные плотности соответствующих зарядов.

Там где носители только электроны, плотность тока определяется выражением:

$$\vec{j} = en\vec{\upsilon}_{\text{др}}.$$

Поле вектора $\vec{j}$ можно изобразить графически с помощью *линий тока*, которые проводят так же, как и линии вектора напряженности $\vec{E}$.



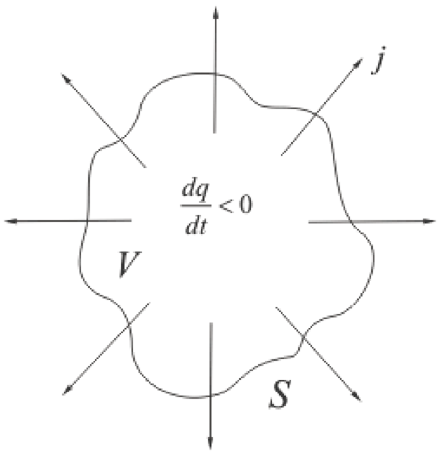
Зная $\vec{j}$ в каждой точке интересующей нас поверхности S, можно найти *силу тока* через эту поверхность, *как поток вектора* $\vec{j}$:

$$I = \int_S (\vec{j}d\vec{S}).$$

Сила тока является скалярной величиной и алгебраической. А знак определяется, кроме всего прочего, выбором направления нормали к поверхности S.

4. Уравнение непрерывности

Представим себе, в некоторой проводящей среде, где течет ток, замкнутую поверхность S. Для замкнутых поверхностей векторы нормалей, а, следовательно, и векторы $\partial\vec{S}$ принято брать наружу, поэтому интеграл $\oint_S (\vec{j}\partial\vec{S})$ - это поток вектора плотности тока, выходящего из этой замкнутой поверхности, равный суммарной силе тока, прошедшего через эту поверхность наружу. Суммарный ток - это заряд, выходящий в единицу времени наружу из объема V, охваченного поверхностью S.



Тогда поток вектора $\vec{j}$ сквозь эту поверхность S равен электрическому току I, идущему из области, ограниченный замкнутой поверхностью S. Следовательно, согласно закону сохранения электрического заряда, суммарный электрический заряд q, охватываемый поверхностью S, изменяется за время ∂t на $\partial q = -I\partial t$, тогда в интегральной форме можно записать:

$$\oint_S (\vec{j}\ d\vec{S}) = I = -\frac{dq}{dt}. \qquad (7)$$

Это соотношение называется <u>уравнением непрерывности.</u> Представляя $q = \int \rho dV$, получим:

$$\oint (\vec{j}_s d\vec{S}) = -\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \qquad (8)$$

где под знаком интеграла частная производная $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, так как плотность заряда может зависеть не только от времени, но и от координат.

<u>Выражение (8) представляет собой уравнение непрерывности в интегральной форме.</u> Оно выражает закон сохранения заряда.

$$div\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \text{или} \quad \nabla\vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (9)$$

Это ***дифференциальная форма записи уравнения непрерывности***.

В случае постоянного тока, распределение зарядов в пространстве должно оставаться неизменным:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = 0,$$

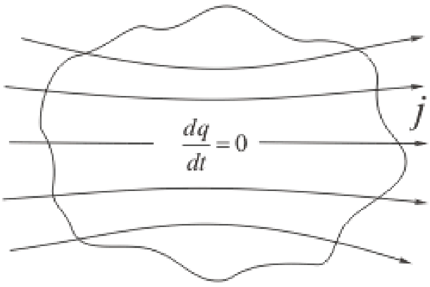
следовательно,

$$\boxed{\oint_S (\vec{j} d\vec{S}) = 0,} \qquad (10)$$

это ***уравнение непрерывности для постоянного тока*** *(в интегральной форме).*

Линии $\vec{j}$ в этом случае нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Поле вектора $\vec{j}$ не имеет источника. *В дифференциальной форме уравнение непрерывности для постоянного тока* $\nabla\vec{j} = 0$ *или* $div\vec{j} = 0$.

Если ток постоянный, то избыточный заряд внутри однородного проводника всюду равен нулю. В самом деле, т.к. для постоянного тока справедливо уравнение $\oint\limits_S (\vec{j}\partial\vec{S}) = 0$, то



$$\sum q_i = 0.$$

Следовательно, для постоянного тока уравнение (12) имеет вид: $\oint\limits_S (\vec{j}d\vec{S}) = 0$. Это означает, что линии тока нигде не начинаются и нигде не заканчиваются. Следовательно, линии постоянного тока всегда замкнуты.

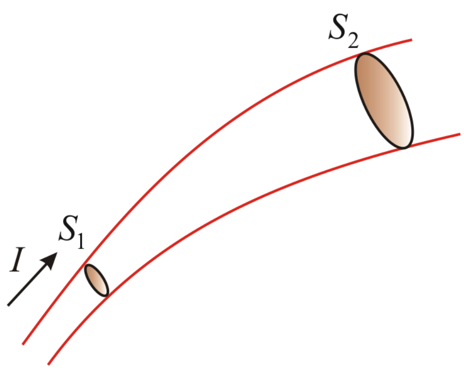
Мы знаем, что плотность постоянного электрического тока одинакова по всему поперечному сечению S однородного проводника. Поэтому для постоянного тока в однородном проводнике с поперечным сечением S сила тока:

$$I = jS.$$

Если проводник имеет неоднородное сечение, а по проводнику течет постоянный ток, то поток силовых линий в любом месте этого проводника величина постоянная.

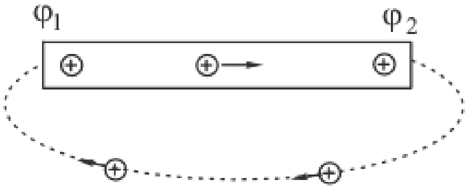
Из постоянства значения I во всех участках цепи постоянного тока следует, что плотности постоянного тока в различных поперечных сечениях 1 и 2 цепи обратно пропорциональны площадям S_1 и S_2 этих сечений :

$$j_2 / j_1 = S_1 / S_2.$$



7.3. Сторонние силы и ЭДС

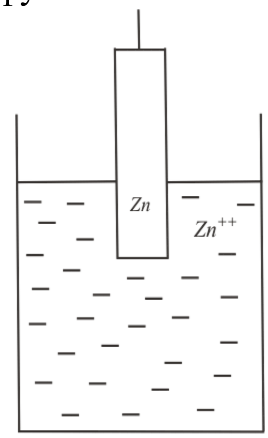
Если в проводнике создать электрическое поле и не принять мер для его поддержания, то перемещение носителей заряда приведет быстро к тому, что поле внутри проводника исчезнет и, следовательно, ток прекратится. Для того чтобы поддерживать ток достаточно длительное время, нужно от конца проводника с меньшим потенциалом непрерывно



отводить приносимые сюда заряды, а к концу с большим потенциалом ($\varphi_1 > \varphi_2$) непрерывно их подводить. Т.е., необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Это согласуется с тем, что линии постоянного тока замкнуты (уравнения непрерывности).

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю. Поэтому, в замкнутой цепи, наряду с участками, на которых положительные заряды движутся в сторону убывания потенциала φ, должны иметься участки, на которых перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания φ, т.е., против сил электростатического поля. Перемещение носителей тока на этих участках возможно лишь с помощью сил не электростатического происхождения, называемых сторонними силами.

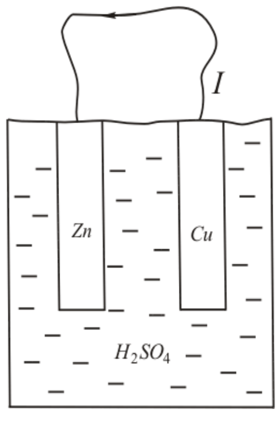
Таким образом, для поддержания тока необходимы сторонние силы, действующие либо на всём протяжении цепи, либо на отдельных ее участках. Они могут быть обусловлены химическими процессами, диффузией носителей заряда в неоднородной среде или через границу двух



разнородных веществ, электрическими полями, которые порождаются меняющимися во времени магнитными полями.

В качестве примера возникновения сторонних сил, обусловленных химическими процессами, рассмотрим гальванический элемент.

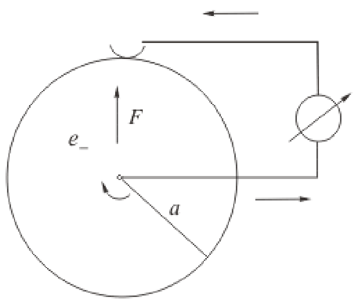
Если опустить в водный раствор серной кислоты цинковую пластину, то цинк начнет растворяться. Однако, атомы Zn будут переходить при этом в раствор не в виде



нейтральных атомов, а в виде положительных ионов Zn^{++}. В результате раствор окажется заряженным положительно, а Zn – отрицательно. На границе между Zn и раствором H_2SO_4 образуется скачок потенциала. В области скачка потенциала появится электрическое поле, направленное от жидкости к металлу, которое завершит дальнейший выход положительных ионов из Zn в раствор. При вполне определенной разности потенциалов между раствором и металлом (~0,51) электрические силы уравновесят химические, и дальнейшее растворение *Zn* прекратится.

Но если в раствор H_2SO_4 поместить вторую металлическую пластинку из какого – либо другого металла (например, меди) и соединить её с *Zn*, то лишние электроны уйдут из *Zn* через медь (*Cu*) в раствор и понизят имевшуюся между *Zn* и раствором разность потенциалов и из *Zn* в раствор вновь начнут поступать положительные ионы. Работа химических сил будет непрерывно восстанавливать скачок потенциала. Аналогичный скачок потенциала возникнет на границе *Cu* с раствором. Наличие неравных друг другу скачков потенциалов, непрерывно поддерживаемое за счет работы химических сил, обусловит электродвижущую силу (ЭДС) гальванического элемента.

Сторонние силы могут возникать и при механическом движении.



Например, металлический диск, радиусом *a*, вращается с угловой скоростью ω. Диск включен в электрическую цепь при помощи скользящих контактов, касающихся оси диска и окружности. В этом случае на каждый электрон металла действует центробежная сила, которая и является сторонней силой. В диске появляется ЭДС, и между осью диска и его окружностью возникает напряжение .Центробежная (сторонняя) сила $F = mr\omega^2$,

где *r* – расстояние от оси диска, *m* – масса электрона. Напряженность электрического поля $E = \frac{F}{e} = \frac{mr\omega^2}{e}$. Тогда возникающая ЭДС равна:

$$\varepsilon = \int_0^a E dr = \frac{m\omega^2}{e}\int_0^a r dr = \frac{m\omega^2 a^2}{2e}.$$

Сторонние силы можно охарактеризовать работой, которую они совершают над перемещающимися по ним зарядами.

<u>Величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда, в цепи или на её участке, называется электродвижущей силой (ЭДС).</u>

Следовательно, если работа сторонних сил над зарядом q равна A, то электродвижущая сила (ЭДС) равна:

$$\varepsilon = \frac{A}{q}. \tag{11}$$

Видно, что размерность ЭДС совпадает с размерностью потенциала, т.е., ЭДС измеряется в вольтах (в системе единиц ″СИ″). Стороннюю силу $\vec{f}_{cm}$, действующую на заряд q, можно представить в виде:

$$\vec{f}_{cm} = \vec{E}^{*} q\,. \tag{12}$$

Векторную величину $\vec{E}^{*}$ называют напряженностью поля сторонних сил. Работу сторонних сил над зарядом q на всём протяжении замкнутой цепи можно выразить в виде:

$$A = \oint (\vec{f}_{cm}\,\vec{dl}) = q\oint(\vec{E}^{*}\vec{dl}) \tag{13}$$

и ЭДС

$$\varepsilon = \frac{A}{q} = \oint(\vec{E}^{*}\vec{dl}) = \oint E_{\ell}\,dl \tag{14}$$

Таким образом, <u>ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил.</u>

Электродвижущая сила, действующая на участке 1 – 2 равна:

$$\varepsilon_{12} = \int_{1}^{2} E_{e}^{*} dl$$

Кроме сторонних сил на заряд действуют силы электростатического поля $\vec{f}_{E} = q\vec{E}$. Результирующая сила, действующая в каждой точке на заряд q, равна:

$$\vec{f} = \vec{f}_{cm} + \vec{f}_{E} = q(\vec{E}^{*} + \vec{E}). \tag{15}$$

Работа, совершаемая этой силой над зарядом q на участке цепи 1 – 2, равна:

$$A_{12} = q\int_{1}^{2} E_{e}^{*} dl + q\int_{1}^{2} E_{e}\,dl = q\varepsilon_{12} + q(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{16}$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю, так что

$$A = q\varepsilon. \qquad (17)$$

<u>Величина, численно равная работе, совершаемой электростатическими и сторонними силами при перемещении положительного единичного заряда, называется падением напряжения или напряжением U на данном участке цепи:</u>

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \qquad (18)$$

При отсутствии сторонних сил напряжение U совпадает с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$.

7.4. Законы постоянного тока

7.4.1. Закон Ома для однородного участка цепи

Немецкий физик Георг Симон Ом в 1826г. экспериментально установил закон, согласно которому сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения U на проводнике. В 1827г. он вывел его теоретически для участка и полной цепи, ввел понятия "электродвижущей силы", "падения напряжения", и "проводимости".

Георг Симон Ом (1787 – 1854) – немецкий физик. В 1826 г. Ом открыл свой основной закон электрической цепи. Этот закон не сразу нашел признание в науке, а лишь после того, как Э. Х. Ленц, Б. С. Якоби, К. Гаусс, Г. Кирхгоф и другие ученые положили его в основу своих исследований. В 1881 г. на Международном конгрессе электриков именем Ома была названа единица электрического сопротивления (Ом). Последние годы своей жизни Ом посвятил исследованиям в области акустики. Акустический закон Ома был положен затем немецким ученым Г. Гельмгольцем в основу резонансной теории слуха. Ом вел также исследования и в области оптики и кристаллооптики.

Закон Ома утверждает, что <u>сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна падению напряжения U на проводнике</u>:

$$I = \frac{U}{R} \qquad (19)$$

Однородным называется проводник, в котором не действуют сторонние силы. В случае однородного проводника напряжение U совпадает с разностью потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ $(U = \varphi_1 - \varphi_2)$.

R в (19) – электрическое сопротивление проводника. Единицей сопротивления служит Ом, равный сопротивлению такого проводника, в котором при напряжении в 1В течет ток силой 1А.

Величина сопротивления зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств материала, из которого он сделан.

Для однородного цилиндрического проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{20}$$

где l – длина проводника,

S – площадь его поперечного сечения,

ρ–зависящий от свойств материала коэффициент, называемый удельным электрическим сопротивлением. При l=1м, S=1м^2 R численно равно ρ, в системе "СИ" ρ измеряется в Ом метрах (Ом м). (Например, для меди ρ=17 10^{-9} Ом м, для алюминия ρ=26 10^{-9} Ом м, для железа ρ=98 10^{-9} Ом м, для нихрома ρ=10^{-6} Ом м).

Для большинства металлов удельное сопротивление растет с температурой приблизительно по линейному закону:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha t), \tag{21}$$

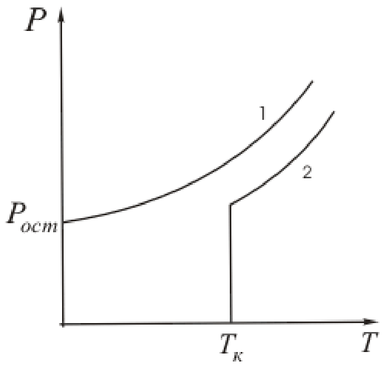
где ρ_0 – удельное сопротивление при 0^{0}С, t – температура по шкале Цельсия, α – температурный коэффициент сопротивления $\left(\alpha \approx \frac{1}{273}\right)$

($\alpha = \frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho}{dT}$ относительное изменение удельного сопротивления при изменении T на 1K)

Переходя к абсолютной температуре, получаем:

$$\rho = \rho_0 \alpha T . \tag{22}$$

При низких температурах наблюдается отступление от этой закономерности. В большинстве случаев зависимость ρ от T следует кривой 1. Величина остаточного сопротивления $\rho_{ост}$ в сильной степени зависит от частоты материала и наличия остаточных механических напряжений в образце. Поэтому после отжига $\rho_{ост}$ заметно умень-



шается. У абсолютно чистого металла с идеально правильной кристаллической решеткой при абсолютном нуле $\rho = 0$.

У большой группы металлов и сплавов при температуре порядка нескольких градусов Кельвина сопротивление скачком обращается в нуль (кривая 2 на рис.52). Впервые это явление, названное сверхпроводимостью было обнаружено в 1911г. нидерландским физиком Гейке Камерлинг – Оннесом (1853 – 1926), работы которого относятся к физике низких температур и сверхпроводимости (он получил жидкий водород, жидкий гелий (4,42к)) для ртути, затем у олова, свинца, алюминия и др. веществ. Для каждого сверхпроводника имеется своя критическая температура $T_к$, при которой он переходит в сверхпроводящее состояние. Полное теоретическое объяснение сверхпроводимости на основе квантомеханических эффектов было дано в 1957г. американским физиком Дж. Бординым, Л.Купером и Дж.Шрифферером (теория БКШ) и советским физиком Н.Н.Боголюбовым в 1958г. Согласно этой теории электроны проводимости в металле кроме кулоновского отталкивания испытывают особый вид взаимного притяжения и объединяются в так называемые куперовские пары (бозоны). Такое согласованное движение пар (направления спинов противоположные) и есть ток проводимости.

7.4.2. Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим неоднородный участок цепи, участок, содержащий источник ЭДС (т.е. участок, где действуют неэлектрические силы). Напряженность $\vec{E}$ поля в любой точке цепи равна векторной сумме поля кулоновских сил и поля сторонних сил, т.е. $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_{ст}$.

Величина, численно равная работе по переносу единичного положительного заряда суммарным полем кулоновских и сторонних сил на участке цепи (1 – 2)*, называется* ***напряжением*** *на этом участке* U_{12} .

$$U_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_q d\vec{l}) + \int_1^2 (\vec{E}_{ст} d\vec{l}). \quad (23)$$

т.к. $(\vec{E}_q d\vec{l}) = -d\varphi$, или $\int_1^2 (\vec{E}_q d\vec{l}) = \varphi_1 - \varphi_2$, тогда

$$U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}. \quad (24)$$

Напряжение на концах участка цепи совпадает с разностью потенциалов только в случае, если на этом участке нет ЭДС, т.е. на однородном участке цепи. Запишем ***обобщенный закон Ома для участка цепи содержащей источник ЭДС***:

$$IR_{12} = (\phi_1 - \phi_2) + \varepsilon_{12}. \quad (25)$$

Обобщенный закон Ома выражает закон сохранения энергии применительно к участку цепи постоянного тока. Он в равной мере справедлив как для пассивных участков (не содержащих ЭДС), так и для активных.

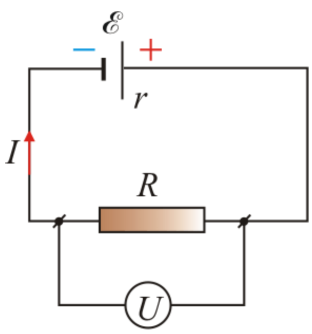
В электротехнике часто используют термин ***падение напряжения*** *– изменение напряжения вследствие переноса заряда через сопротивление*

$$U = IR.$$

В замкнутой цепи: $\varphi_1 = \varphi_2$;

$$IR_\Sigma = \varepsilon \qquad \text{или} \qquad I = \frac{\varepsilon}{R_\Sigma},$$

где $R_\Sigma = R + r$; r – внутреннее сопротивление активного участка цепи .



Тогда закон Ома для замкнутой цепи, содержащей источник ЭДС запишется в виде

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (26)$$

7.5. Закон Ома в дифференциальной форме

Закон Ома в интегральной форме для однородного участка цепи (не содержащего ЭДС)

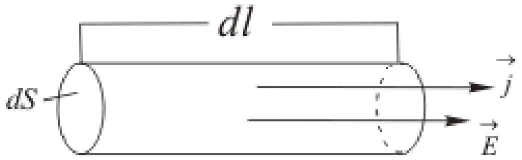
$$I = \frac{U}{R}$$

Для однородного линейного проводника выразим R через ρ:

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

ρ – удельное объемное сопротивление.

Найдем связь между $\vec{j}$ и $\vec{E}$ в бесконечно малом объеме проводника – *закон Ома в дифференциальной форме*.



В изотропном проводнике (в данном случае с постоянным сопротивлением) носители зарядов движутся в направлении действия силы, т.е. вектор плотности тока $\vec{j}$ и вектор напряженности поля $\vec{E}$ коллинеарны.

Исходя из закона Ома для участка цепи, имеем:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{E\mathrm{d}l}{\rho\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}} = \frac{E\mathrm{d}S}{\rho}$$

А мы знаем, что $j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{\rho}E$ или $\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$. Отсюда можно записать

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}, \qquad (27)$$

это запись ***закона Ома в дифференциальной форме***.
Здесь $\sigma = 1/\rho$ – *удельная электропроводность*.

Размерность σ – [$\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$].

Плотность тока можно выразить через заряд электрона e, количество зарядов n и дрейфовую скорость $\vec{\upsilon}$:

$$\vec{j} = en\vec{\upsilon}.$$

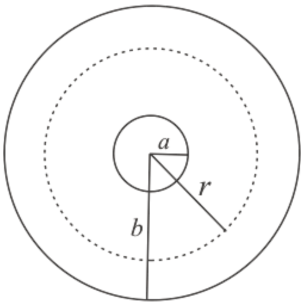
Обозначим $b = \frac{\vec{\upsilon}}{E}$, тогда $\vec{\upsilon} = b\vec{E}$;

$$\vec{j} = enb\vec{E} \qquad (28)$$

Теперь, если удельную электропроводность σ выразить через e, n и b: $\sigma = enb$, то вновь получим выражение ***закона Ома в дифференциальной форме:***
$\vec{j} = \sigma\vec{E}$.

Пример применения закона Ома в дифференциальной форме для определения электропроводимости среды.

Пример. Для вычисления силы тока в проводящих средах вначале вычисляют по заданному напряжению между электродами напряженность поля внутри проводящей среды, т.е., решают задачу электростатики. Затем, пользуясь законом Ома в дифференциальной форме, определяют плотность тока $\vec{j}$ в каждой точке среды. После этого нужно мысленно выделить какую – либо замкнутую поверхность S, окружающую один из электродов, и найти силу тока I, согласно $I = \int\limits_s j_n dS$ (как поток вектора плотности тока через эту поверхность).



В качестве примера, рассмотрим определение тока утечки кабеля (или цилиндрического конденсатора), для которого известно напряжение между внутренней жилой и внешней оболочкой U_0 и радиус внутренней жилы a, радиус внешней оболочки b. Найдём разность потенциалов между внутренней жилой и точкой на расстоянии r от центра кабеля (конденсатора):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = U = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}\ln\frac{r}{a}, \text{ тогда } U_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon}\ln\frac{b}{a}$$

здесь ε – диэлектрическая проницаемость среды. Из этих выражений найдём:

$$\frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}} = \frac{U}{\ln\frac{r}{a}} \text{ и } U = \frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}\ln\frac{r}{a}.$$

Откуда напряженность электрического поля между внутренней жилой и точкой на расстоянии r от центра:

$$E = -\frac{dU}{dr} = -\frac{U_0}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}$$

Отсюда плотность тока:

$$j = \sigma E = -\frac{U_0\sigma}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}$$

Знак „–” показывает направление тока.

В качестве замкнутой поверхности целесообразно выбрать цилиндр радиуса r, проходящий между электродами кабеля (конденсатора). В этом случае $j_n = j$ и постоянна на поверхности цилиндра. Поэтому, сила тока на единицу длины кабеля (конденсатора) получается равной:

$$\frac{I}{l} = jS = U_0 \frac{\sigma}{\ln\frac{b}{a}} \frac{1}{r} 2\pi r = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{b}{a}} U_0$$

и таким образом, ток утечки

$$I = \frac{2\pi\sigma U_0 l}{\ln\frac{b}{a}}, \quad \text{где} \quad l \text{ – длина кабеля (конденсатора)}$$

Сопротивление кабеля (конденсатора):

$$R = \frac{2\pi\sigma}{\ln\frac{b}{a}} l .$$

Такими формулами пользуются для вычисления тока и сопротивления утечки кабеля и цилиндрического конденсатора.

7.6. Закон Джоуля – Ленца. Работа и мощность тока

Рассмотрим произвольный участок цепи, к концам которого приложено напряжение U. За время dt через каждое сечение проводника проходит заряд

$$\mathrm{d}q = I\mathrm{d}t.$$

При этом силы электрического поля, действующего на данном участке, совершают работу:

$$\mathrm{d}A = U\mathrm{d}q = UI\mathrm{d}t.$$

Разделив работу на время, получим выражение для мощности:

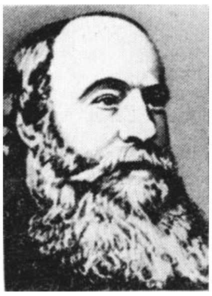
$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = UI. \qquad (29)$$

Полезно вспомнить и другие формулы для мощности и работы:

$$N = RI^2; \qquad (30)$$

$$A = RI^2 t. \qquad (31)$$

В 1841 г. манчестерский пивовар Джеймс Джоуль и в 1843 г. петербургский академик Эмилий Ленц установили закон теплового действия электрического тока.



Джоуль Джеймс Пресскотт (1818 – 1889) – английский физик, один из первооткрывателей закона сохранения энергии. Первые уроки по физике ему давал Дж. Дальтон, под влиянием которого Джоуль начал свои эксперименты. Работы посвящены электромагнетизму, кинетической теории газов.

Ленц Эмилий Христианович (1804 – 1865) – русский физик. Основные работы в области электромагнетизма. В 1833 г. установил правило определения электродвижущей силы индукции (закон Ленца), а в 1842 г. (независимо от Дж. Джоуля) – закон теплового действия электрического тока (закон Джоуля-Ленца). Открыл обратимость электрических машин. Изучал зависимость сопротивление металлов от температуры. Работы относятся также к геофизике.

Независимо друг от друга Джоуль и Ленц показали, *что при протекании тока, в проводнике выделяется количество теплоты:*

$$Q = RI^2 t. \tag{32}$$

Если ток изменяется со временем, то

$$Q = \int_1^2 RI^2 \mathrm{d}t.$$

Это закон ***Джоуля – Ленца в интегральной форме***.

Отсюда видно, что *нагревание происходит за счет работы, совершаемой силами поля над зарядом*.

Соотношение (32) имеет интегральный характер и относится ко всему проводнику с сопротивлением R, по которому течет ток I.

Получим закон Джоуля-Ленца в локальной, дифференциальной форме, характеризуя тепловыделение в произвольной точке. ***Тепловая мощность тока*** в элементе проводника Δl, сечением ΔS, объемом $\Delta V = \Delta l \cdot \Delta S$ равна:

$$\Delta W = I^2 R = I\Delta\varphi = j\Delta S E \Delta l = \vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}\Delta V.$$

Удельная мощность тока

$$\omega = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \vec{\mathrm{j}}\vec{\mathrm{E}}.$$

Согласно закону Ома в дифференциальной форме $\vec{\mathrm{j}} = \sigma\vec{\mathrm{E}}$, получим закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = \sigma \mathrm{E}^2, \tag{33}$$

характеризующий плотность выделенной энергии. Так как выделенная теплота равна работе сил электрического поля

$$A = IUt,$$

то мы можем записать для мощности тока:

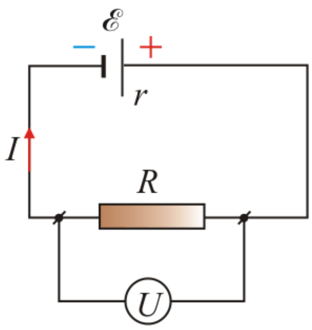
$$N = UI = RI^2.$$

Мощность, выделенная в единице объема проводника $\omega = \rho j^2$.

Приведенные формулы справедливы для однородного участка цепи и для неоднородного.

7.7. КПД источника тока

Рассмотрим элементарную электрическую цепь, содержащую источник ЭДС с внутренним сопротивлением r, и внешним сопротивлением R.



КПД всегда определяем как отношение полезной работы к затраченной:

$$\eta = \frac{A_{\text{п}}}{A_{\text{з}}} = \frac{N_{\text{п}}}{N_{\text{з}}} = \frac{UI}{\varepsilon I} = \frac{U}{\varepsilon}.$$

Полезная работа – мощность, выделяемая на внешнем сопротивлении R в единицу времени. По закону Ома имеем: $U = IR$, а $\varepsilon = (R + r)I$, тогда

$$\eta = \frac{U}{\varepsilon} = \frac{IR}{I(R+r)} = \frac{R}{R+r}.$$

Таким образом, имеем, что при $R \to \infty$, $\eta \to 1$, но при этом ток в цепи мал и полезная мощность мала. Вот парадокс – мы всегда стремимся к повышенному КПД, а в данном случае нам это не приносит пользы.

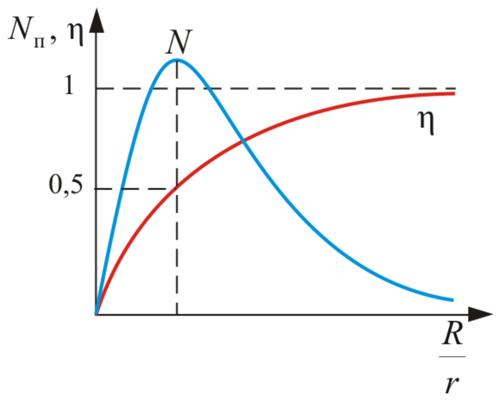
Найдем условия, при которых полезная мощность будет максимальна. Для этого нужно, чтобы $\frac{\mathrm{d}N_{\text{п}}}{\mathrm{d}R} = 0$.

$$N_{\text{п}} = I^2 R = \left(\frac{\varepsilon}{R+r}\right)^2. \qquad R = \frac{\varepsilon^2 R}{(r+R)^2}.$$

$$\frac{\mathrm{d}N_{\text{п}}}{\mathrm{d}R} = \frac{\varepsilon^2 (R+r)^2 - 2(r+R)\varepsilon^2 R}{(R+r)^4} = 0. \qquad (34)$$

$$\varepsilon^2 [(R+r) - 2R] = 0$$

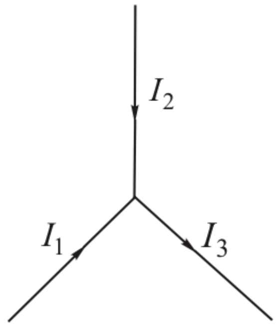
В выражении (7.8.2) $\varepsilon \neq 0$, $R + r \neq 0$, следовательно, должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках, т.е. $r = R$. При этом условии выделяемая мощность максимальна, а КПД равен 50%.



Вышесказанное утверждение иллюстрируется на рисунке.

7.8. Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Расчет разветвленных цепей с помощью закона Ома довольно сложен. Эта задача значительно упрощается, если пользоваться правилами, сформулированными немецким физиком Г.Р.Кирхгофом (1824 – 1887) в 1847г. Этих правил два.

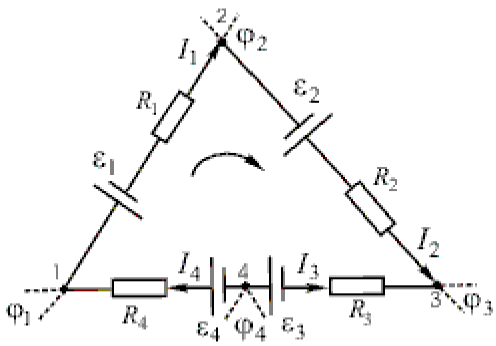


Первое относится к узлам цепи. Узлом цепи называется точка, в которой сходится более чем два проводника. Ток, текущий к узлу имеет один знак , от узла – другой.

Первое правило Кирхгофа. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

$$\Sigma I_к = 0 \tag{35}$$

Это следует из того, что если бы $\Sigma I_к \neq 0$, то в узле происходило бы накапливание или уменьшение заряда, что приводило бы к изменению потенциала узла и, таким образом, изменению текущих в цепи токов. Поэтому, чтобы токи в цепи были постоянными, должно выполняться первое правило Кирхгофа.



Второе правило Кирхгофа.

Второе правило относится к любому, выделенному в разветвленной цепи замкнутому контуру.

Зададимся направлением обхода (например, по часовой стрелке как указано на рисунке) и применим к каждому из неразветвленных участков контура закон Ома:

$$I_1R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$$

$$I_2R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2$$

$$I_3R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3$$

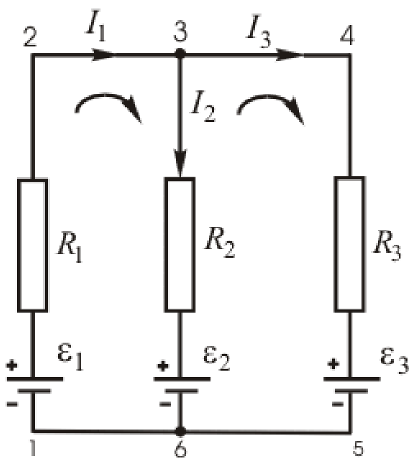
$$I_4R_4 = \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4$$

При сложении этих выражений потенциалы уничтожаются, и получается уравнение:

$$\Sigma I_к R_к = \Sigma \varepsilon_к, \qquad (36)$$

которое выражает второе правило Кирхгофа: В любом контуре токов алгебраическая сумма произведений $I_кR_к$ (падений напряжений) равна сумме ЭДС, приложенных к этому контуру.

Пример применения правил Кирхгофа к расчету разветвленных цепей. В качестве примера рассмотрим разветвленную цепь, изображенную на рис.58. Уравнение (153) может быть составлено для всех замкнутых контуров, которые можно выделить мысленно в данной разветвленной цепи. Но не зависимыми будут только уравнения для тех контуров, которые нельзя получить наложением других контуров друг на друга. Так, например:



1)для контура 1 – 2 – 3 – 6 – 1

2)для контура 3 – 4 – 5 – 6 – 3

3)для контура 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1

Последний контур получается наложением первых двух. Следовательно, указанные уравнения не будут независимыми. В качестве независимых уравнений можно взять любые два уравнения из трёх.

При составлении уравнений второго правила Кирхгофа токам и ЭДС нужно приписывать знаки в соответствии с выбранным направлением обхода. Например, ток I_2 во втором контуре нужно считать отрицательным, так как он течет навстречу выбранному направлению обхода, ЭДС ε_2 также нужно приписывать знак “ – “, так она действует в направлении, противоположно направлению обхода в первом контуре и т.д.

Направление обхода в каждом из контуров можно выбирать совершенно произвольно и независимо от выбора направлений в других контурах.

В данном примере произведем расчет по нахождению ε_2 и токов I_1 и I_3 при известных значениях $\varepsilon_1 = 8B,\quad \varepsilon_3 = 5B,\quad I_2 = 1$А, $R_1 = 2$Ом, $R_2 = 4$Ом, $R_3 = 3$Ом.

Цепь имеет два узла (точки 3 и 6). По первому правилу Кирхгофа при выбранных направлениях токов:

$$I_1 = I_2 + I_3$$

По второму правилу Кирхгофа:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

$$-I_2R_2 + I_3R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$$

После сложения уравнений получаем:

$$I_1R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3$$

Это уравнение можно получить, рассматривая контур 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 1:

$$(I_2 + I_3)R_1 + I_3R_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_3, \text{ откуда}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3 - I_2R_1}{R_1 + R_3} = \frac{8-5-2}{5} = 0{,}2A,$$

тогда ток $I_1 = I_2 + I_3 = 1 + 0{,}2 = 1{,}2A$ и из первого уравнения (можно из второго) $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 - I_1R_1 - I_2R_2 = 8 - 2{,}4 - 4 = 1{,}6B$.

Значение токов и ЭДС получились положительными. Это означает, что направления токов были выбраны правильно. Если бы значения токов и ЭДС были отрицательным, то это означало бы, что их направления должны быть противоположны изображенным.