Тема 5. проводники в электростатическом поле

5.1. Проводники в электростатическом поле
5.2. Электрическая емкость. Емкость уединенного проводника
5.3. Расчет емкостей различных конденсаторов
5.4. Соединение конденсаторов
5.5. Энергия электростатического поля

Проводники – это вещества, хорошо проводящие электрический ток, т.е., обладающие высокой электропроводностью (низким удельным сопротивлением $\rho \le 10^{-8}$ *Ом см*). К проводникам относятся металлы, электролиты и плазма. В металлах носителями тока являются свободные электроны проводимости. В электролитах ток создается положительными и отрицательными ионами. В плазме носителями электрического тока являются свободные электроны, а также положительные и отрицательные ионы.

5.1. Проводники в электростатическом поле

При внесении незаряженного проводника в электрическое поле носители заряда приходят в движение: положительные в направление вектора $\vec{E}$, отрицательные в противоположную сторону. В результате у концов проводника возникают заряды противоположного знака, называемые индуцированными зарядами (рис. 5.1).

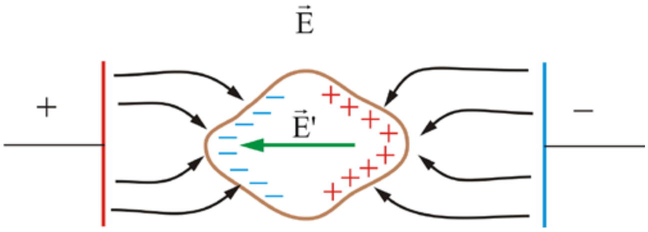


Рис. 5.1

В металлических проводниках подвижными носителями заряда являются электроны, заряд которых является отрицательным. Поэтому электроны устремляются в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{E}$. В результате на другом конце проводника индуцируются положительные заряды (вследствие недостатка электронов). Поле возникших зарядов направлено противоположно внешнему полю. Таким образом, накапливание зарядов у концов проводника приводит к ослаблению в нем поля. Перераспределение носителей заряда происходит до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника перпендикулярными к его поверхности (рис. 5.1). Следовательно, нейтральный проводник, внесенный в электрическое поле разрывает часть линий напряженности – они заканчиваются на отрицательных индуцированных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индуцированные заряды распределяются по внешней поверхности проводника. Если внутри проводника имеется полость, то при равновесном распределении индуцированных зарядов поле внутри нее также обращается в нуль. На этом основывается <u>*электростатическая защита*</u>. Когда какой – то прибор необходимо защитить от воздействия внешних полей, его окружают проводящим футляром (экраном). Внешнее поле компенсируется индуцированными зарядами. Подобный экран действует хорошо и в том случае, если его сделать не сплошным, а в виде густой сетки.

Таким образом, *при внесении незаряженного проводника во внешнее электростатическое поле на поверхности проводника индуцируются заряды. Суммарный заряд проводника равен нулю.*

Равновесие зарядов на проводнике может наблюдаться лишь при выполнении следующих условий:

1. *Напряженность электрического поля внутри проводника должна быть равна нулю.*

$$\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

В соответствии с формулой (33) $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ это означает, что потенциал внутри проводника и на его поверхности должен быть постоянным ($\varphi = const$)

2. *Напряженность поля на поверхности проводника должна быть направлена по нормали к поверхности,* т.е.

$$E = E_n \qquad (2)$$

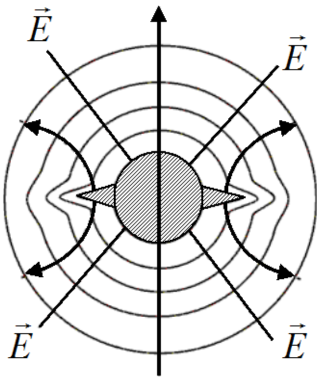


Рис. 5.2

Следовательно, в случае равновесия зарядов *поверхность проводника будет эквипотенциальной.*

Можно доказать это последнее утверждение формально: проведем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность *S*, ограничив некоторый объем внутри проводника. Тогда, согласно теореме Остроградского-Гаусса, суммарный заряд *q* этого объема равен нулю

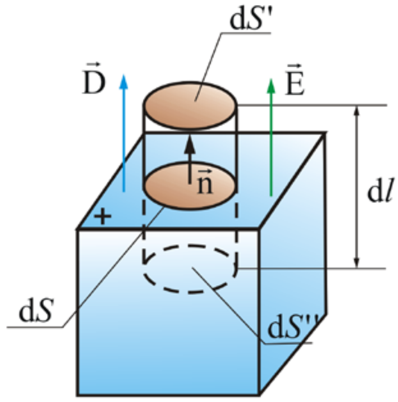
$$q = \oint_S D\mathrm{d}S = \oint_S E\varepsilon\varepsilon_0\mathrm{d}S = 0, \text{ так как } E = 0.$$

3. Если проводнику сообщить некоторый заряд *q*, то он распределится так, чтобы соблюдались условия равновесия заряда. Это означает, что ни в каком месте внутри проводника и на его поверхности избыточные заряды располагаться не могут, так как одноименные заряды, образующие данный заряд *q*, взаимно отталкиваются и стремятся расположиться на наибольшем расстоянии друг от друга. В заряженном проводнике ***некомпенсированные*** заряды располагаются только на поверхности (их расталкивают кулоновские силы).

Рассмотрим поле, создаваемое изображенным на рис. 5.2 заряженным проводником. На больших расстояниях от проводника эквипотенциальные поверхности имеют характерную для точечного заряда форму сферы. По мере приближения к проводнику эквипотенциальные поверхности становятся все более сходными с поверхностью проводника, которая является эквипотенциальной. Вблизи выступов эквипотенциальные поверхности располагаются гуще, значит и, напряженность поля здесь больше. Отсюда следует, что плотность зарядов на выступах должна быть наибольшей. К такому же выводу можно прийти, учтя, что из–за взаимного отталкивания заряды стремятся расположиться как можно дальше друг от друга.

Покажем, что напряженность поля, созданного заряженным проводником вблизи его поверхности пропорциональна поверхностной плотности заряда. Выделим на поверхности S проводника площадку dS и построим на ней цилиндр с образующими, перпендикулярными к площадке dS, высотой dl .

$$dS' = dS'' = dS.$$



На поверхности проводника вектор напряженности поля $\vec{E}$ и вектор электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ перпендикулярны поверхности. Поэтому поток $\vec{D}$ сквозь боковую поверхность равен нулю.

Поток вектора электрического смещения Φ_D через dS'' тоже равен нулю, так как dS'' лежит внутри проводника, где $\vec{E} = 0$ и, следовательно, $\vec{D} = 0$. Отсюда следует, что поток dΦ_D сквозь замкнутую поверхность равен потоку $\vec{D}$ через dS':

$d\Phi_D = D_n dS$.

С другой стороны, по теореме Остроградского-Гаусса:

$d\Phi_D = dq = \sigma dS$,

где σ – поверхностная плотность зарядов на dS. Из равенства правых частей следует, что $D_n = \sigma$, тогда

$$E_n = \frac{D_n}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon}. \qquad (3)$$

Итак, напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника прямо пропорциональна поверхностной плотности зарядов.

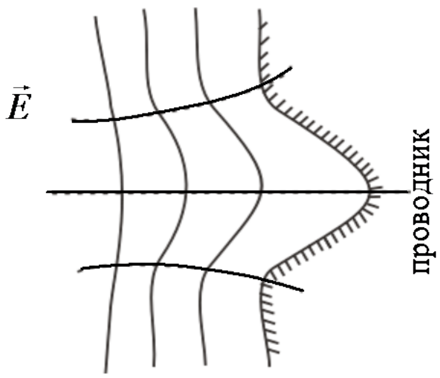


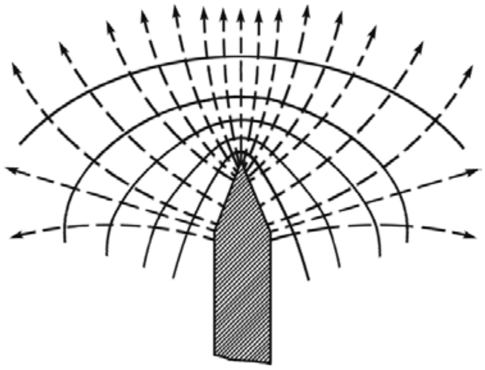
Рис. 5.3

Поверхностная плотность зарядов при данном потенциале проводника определяется кривизной поверхности – она растет с увеличением положительной кривизны (выпуклости) и убывает с увеличением отрицательной кривизны (вогнутости).

Поэтому вблизи углублений в проводнике эквипотенциальные поверхности расположены реже (рис. 5.3). Соответственно напряженность поля и плотность зарядов в этих местах будет меньше.

На острие плотность заряда наибольшая,

поэтому напряженность электростатического поля максимальна на острие заряженного проводника.



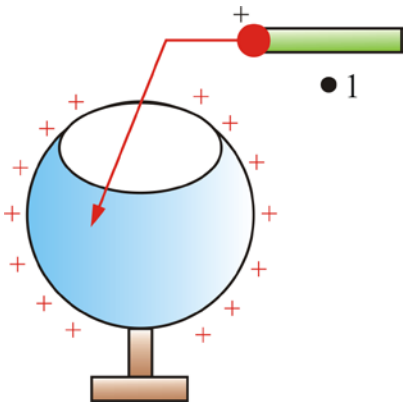
Так как на остриях велика плотность заряда, поэтому напряженность поля вблизи острия может быть настолько большой, что возникает ионизация молекул газа, окружающего проводник. Ионы иного знака, чем q, притягиваются к проводнику и нейтрализуют его заряд. Ионы того же знака, что и q, начинают двигаться от проводника, увлекая с собой нейтральные молекулы газа. В результате возникает ощутимое движение газа, называемое электрическим ветром. Заряд проводника уменьшается, он как бы стекает с острия и уносится ветром. Такое явление называют истечением заряда с острия (электростатический ветер).

Большая напряженность поля E на остриях – нежелательное явление, т.к. происходит утечка зарядов и ионизация воздуха. Ионы уносят электрический заряд, проводник разряжается

Есть наглядные эксперименты по этому явлению: сдувание пламени свечи электрическим ветром, колесо Франклина или вертушка, электростатический двигатель.

Таким образом, на *заряженном проводнике заряды распределяются по его поверхности.*

Если заряженный металлический шарик привести в соприкосновение с поверхностью какого-либо проводника, то заряд шарика частично передается проводнику: шарик будет разряжаться до тех пор, пока их потенциалы не выровняются. Иначе обстоит дело, если шарик привести в соприкосновение с внутренней поверхностью полого проводника. При этом весь заряд с шарика стечет на проводник и распределится на внешней поверхности проводника (рисунок).



Потенциал полого проводника может быть больше, чем потенциал шарика, тем не менее, заряд с шарика стечет полностью. В точке 1 потенциал шарика меньше потенциала проводника ($\varphi_{Ш} < \varphi_{ПР}$), но пока мы переносили шарик в полость, мы совершили работу по преодолению сил отталкивания и, тем самым увеличивая потенциальную энергию, увеличили потенциал шарика. То есть, когда мы вносим шарик, потенциал его становится больше, и заряд как обычно перетекает от большего потенциала к меньшему. Перенося с помощью шарика следующую порцию заряда, мы совершаем еще большую работу. Это наглядный пример того, что потенциал – энергетическая характеристика.

Это свойство распределения зарядов по поверхности проводника можно использовать при перенесении заряда с одного проводника на другой или при создании электростатических генераторов.

Электростатический генератор

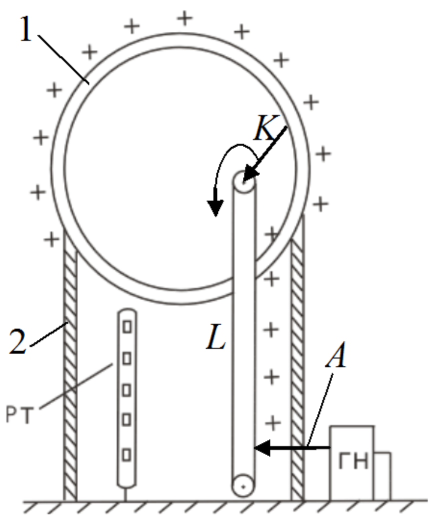


Рис. 5.4

В 1929г. американский физик Ван–де–Грааф (1906–1967) предложил конструкцию электростатического генератора, основывающуюся на том, что избыточные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Схема такого генератора показана на рис.5.4.

Полый металлический шар 1 устанавливается на изолирующей колонне 2. Внутрь шара (кондуктора) введена надетая на валики бесконечно движущаяся лента *L* из шелка или прорезиненной ткани. У основания колонны вблизи ленты установлена гребенка из остриев *A*, с которых стекает на ленту заряд, возбуждаемый генератором напряжения (ГН) на несколько десятков киловольт. Внутри шара установлена вторая гребенка *K*, на острия которой переходит заряд с ленты. Это гребенка соединена с шаром, так что снятый с ленты заряд сразу же переходит на внешнюю поверхность. По мере накапливания на шаре зарядов потенциал его растет, пока утечка заряда не станет равна подводимому заряду. Утечка происходит в основном за счет ионизации газа вблизи поверхности шара (коронный разряд). Чтобы уменьшить коронирование, поверхность шара тщательно шлифуют.

Напряженность поля, при которой возникает разряд в воздухе при атмосферном давлении, составляет примерно 30 кВ/см. Такая напряженность достигается вблизи поверхности шара тем быстрее, чем меньше его радиус ($E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}$). Поэтому для получения большой напряженности шар делается больших размеров (диаметр~10м). Электрическая прочность газа (т.е. напряженность поля, при которой начинается разряд) возрастает с повышением давления (порядка до 10 атмосфер). Предельная разность потенциалов, которую можно получить с помощью генератора Ван–де–Граафа, составляет около 10^7В.

Генераторы Ван–де–Граафа используются в настоящие время в технике. Например, в Массачусетском технологическом институте построен генератор с диаметром сферы 4,5 метров и получен потенциал $3 \div 5 \cdot 10^6$ В.

У нас в Томске хорошо развита ускорительная техника. Так, только в НИИ ядерной физики имеется около десяти ускорителей различного класса. Один из них ЭСГ или генератор Ван-де-Граафа. Он изготовлен в специальной башне, и на нем был получен потенциал один миллион вольт.

Генератор Ван–де–Граафа используется для ускорения заряженных частиц в опытах по исследованию атомного ядра. Ускорение частиц осуществляется в разрядной трубке РТ, к электродам которой прикладывается разность потенциалов, получаемая на генераторе.

Поле внутри шара отсутствует, поэтому при работе генератора в воздухе, внутри кондуктора могут находиться люди.

5.2. Электрическая емкость. Емкость уединенного проводника

Сообщенный проводнику заряд q распределится по его поверхности так, чтобы напряженность поля внутри проводника была равна нулю. Если проводнику, уже имеющему заряд q, сообщить еще заряд той же величины, то он должен распределиться по проводнику точно таким же образом, как и первый. В противном случае он создает в проводнике поле, отличное от нуля. Следует отметить, что это справедливо лишь в том случае, если увеличение заряда на проводнике не вызовет изменений в распределении зарядов на окружающих телах. Таким образом, различные по значению заряды распределяются на удаленном от других тел уединенном проводнике таким образом, что отношение плотностей заряда в двух произвольных точках проводника при любой величине заряда будет одно и то же. Отсюда вытекает, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду. Действительно, увеличение в некоторое число раз заряда приводит к увеличению в то же число раз напряженности поля в каждой точке окружающего проводник пространства. Следовательно, в такое же число раз возрастет потенциал проводника, численно равный работе переноса по любому пути единичного заряда из бесконечности на поверхность проводника. Таким образом, для уединенного проводника:

$$q = C\varphi, \tag{4}$$

где C – коэффициент пропорциональности между потенциалом и зарядом называется *электроемкостью* (емкостью) проводника:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{5}$$

Отсюда следует, что *электроемкость – это количественная мера способности проводника удерживать заряд.* Или *емкость численно равна заряду, сообщение которого проводнику повышает его потенциал на единицу или* $C = \frac{dq}{d\varphi}$.

Найдем емкость уединенного шара, погруженного в однородный диэлектрик. Для этого вычислим потенциал заряженного шара радиуса *R*. Учитывая, что $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$, или $\vec{E} = \frac{-d\vec{\varphi}}{dr}$ (33) и $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, получим $d\varphi = -\int E dr$. Проинтегрировав это выражение от R до ∞ (потенциал на бесконечности полагаем равным нулю) получим:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{q}{\varepsilon r^2} dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon R}. \qquad (6)$$

Из сопоставлений (75) и (74) найдем емкость шара радиуса *R*, погруженного в диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \varepsilon R \qquad (7)$$

За единицу емкости принимают емкость такого проводника, потенциал которого увеличивается на 1В при сообщении ему заряда в 1*Кл*. Эта единица емкости называется *фарадой*.

Емкостью в одну фараду обладал бы уединенный шар радиуса $9{\cdot}10^9$м, т.е., радиусом, примерно в 1500 раз большим радиуса Земли ($6.37{\cdot}10^6$м). Таким образом, фарада – очень большая величина. Поэтому на практике пользуются единицами, равными долям фарады – микрофарадой (10^{-6}ф) или пикофарадой (10^{-12}ф).

5.3. Расчет емкостей различных конденсаторов

Уединенные проводники обладают малой емкостью. Даже шар таких размеров, как Земля, имеет емкость лишь 700 мкф. Вместе с тем на практике бывает потребность в устройствах, которые при небольшом относительно окружающих тел потенциале накапливали бы на себе (конденсировали) заметные по величине заряды. В основу таких устройств, называемых *конденсаторами*, положен тот факт, что, электроемкость проводника возрастает при приближении к нему других тел. Это происходит потому, что под действием поля, создаваемого заряженным проводником, на поднесенном к нему теле возникают индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Заряды, противоположные по знаку заряду проводника *q*, располагаются ближе к проводнику, чем одноименные и, следовательно, оказывают большее влияние на его потенциал. Поэтому при поднесении к заряженному проводнику, какого либо тела потенциал проводника уменьшается по абсолютной величине. Согласно формуле (5) это означает увеличение емкости проводника.

Конденсатор – это два проводника, называемые *обкладками,* расположенные близко друг к другу.

Конструкция конденсатора такова, что внешние, окружающие конденсатор тела, не оказывают влияние на его электроемкость. Это будет выполняться, если электростатическое поле будет сосредоточено внутри конденсатора, между обкладками.

Так как электростатическое поле сосредоточено внутри конденсатора, то линии электрического смещения начинаются на положительной обкладке, заканчиваются на отрицательной. Следовательно, заряды на обкладках *противоположны по знаку, но одинаковы по величине.*

Под емкостью конденсатора понимается физическая величина, пропорциональная заряду q и обратно пропорциональная разности потенциалов между обкладками:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{8}$$

Емкость конденсатора измеряется в тех же единицах, что и емкость уединенного проводника.

Значение емкости определяется геометрией конденсатора (формой и размерами обкладок) и зазором между ними, а также диэлектрическими свойствами среды, заполняющей пространство между обкладками.

Конденсаторы бывают плоские, цилиндрические и сферические.

1. Емкость плоского конденсатора.

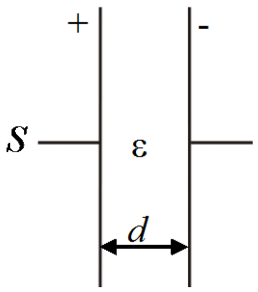


Рис. 5.5

Рассчитаем емкость плоского конденсатора (рис. 36), состоящего из двух параллельных металлических пластин, площадью S каждая, расположенных на расстоянии d друг от друга и имеющих заряды $+q$ и $-q$. Разность потенциалов между обкладками конденсатора φ_1-φ_2. Напряженность электростатического поля между обкладками конденсатора согласно теоремы Гаусса:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon S}, \tag{9}$$

где S – площадь обкладок, q – заряд на обкладках ($\sigma = \frac{q}{S}$).

Разность потенциалов между обкладками согласно (33) находится из выражения $E = -\frac{d\varphi}{dx}$ откуда: $d\varphi = -\int_0^d E dx$ и после интегрирования:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{qd}{\varepsilon_0 \varepsilon S} \tag{10}$$

После подстановки (80) в (78) находим выражение для емкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \tag{11}$$

где d – зазор между обкладками,

ε – диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор.

2. Емкость цилиндрического конденсатора

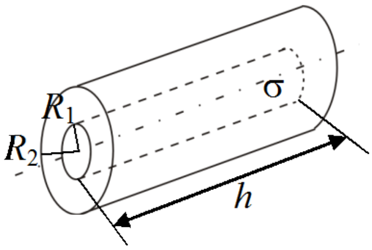


Рис. 5.6

На рис. 5.6 изображен цилиндрический конденсатор. Он представляет собой два коаксиальных (имеющий общую ось) цилиндра радиусами R_1 и R_2. Цилиндры имеют заряд $q = \sigma 2\pi R_1 h$. Длина конденсатора h. В пространстве между цилиндрами диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Напряженность поля между цилиндрами в точке на расстоянии r от оси цилиндра согласно теореме Гаусса: $E(r) = \dfrac{\sigma R_1}{\varepsilon\varepsilon_0 r}$. Разность потенциалов между обкладками $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$, откуда $d\varphi = -\int\limits_0^d E(r)dr$ или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{\sigma R_1}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dr}{r_0} = \frac{\sigma R_1}{\varepsilon\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1};$$

так как $\sigma = \dfrac{q}{2\pi R_1 h}$, то

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0 2\pi h}\ln\frac{R_2}{R_1}, \qquad (12)$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок конденсатора, h – длина обкладок.

Емкость цилиндрического конденсатора определяется выражением $C = \dfrac{q}{\varphi_1 - \varphi_2}$ или

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}. \qquad (13)$$

3. Емкость сферического конденсатора

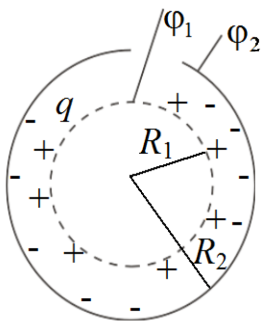


Рис. 5.7

Аналогично предыдущему находится емкость сферического конденсатора. На рис. 5.7 изображен сферический конденсатор, представляющий собой две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2, между сферами диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε.

Внутренняя сфера имеет заряд q, электрическое поле конденсатора сосредоточено между сферами. Напряженность поля в точке на расстоянии r от центра сфер равна $E(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\dfrac{q}{r}$. Так как $E = -\dfrac{d\varphi}{dr}$, то $d\varphi = -\int\limits_{R_1}^{R_2} E(r)dr$

или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{R_1}^{R_2} E(r)dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1} \qquad (14)$$

где R_1 и R_2 – радиусы внутренней и внешней обкладок. Емкость сферического конденсатора будет определятся как :

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (15)$$

Помимо емкости конденсатор характеризуется предельным напряжением U_{max}, которое можно прикладывать к обкладкам конденсатора, не опасаясь его пробоя. При превышении этого напряжения между обкладками возникает искра, в результате чего разрушается диэлектрик и конденсатор выходит из строя.

5.4. Соединение конденсаторов

Располагая некоторым набором конденсаторов, можно значительно расширить число возможных значений емкости и рабочего напряжения, если применить соединение конденсаторов в батарею.

При параллельном соединении конденсаторов одна из обкладок имеет потенциал φ_1, а другая φ_2 (рис. 5.8, где $U = \varphi_1 - \varphi_2$). Следовательно, на каждой из двух систем обкладок накапливается суммарный заряд:

$$q = \sum q_\kappa = \sum C_\kappa(\varphi_1 - \varphi_2) = (\varphi_1 - \varphi_2)\sum C_K = U\sum C_K. \qquad (16)$$

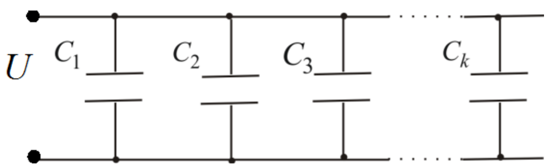


Рис. 5.8

Емкость батареи получим, разделив суммарный заряд (16) на приложенное к батарее конденсаторов напряжение. В результате получим:

$$C = \sum C_\kappa. \qquad (17)$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов емкости складываются. Предельное напряжение батареи равно наименьшему из значении U_{max} для конденсаторов, включенных в батарею.

При последовательном соединении конденсаторов значение заряда q на обкладках конденсаторов одинакова. Поэтому напряжение на каждом из конденсаторов (рис.5.9)

$$U_k = \frac{q}{C_k} \qquad (18)$$

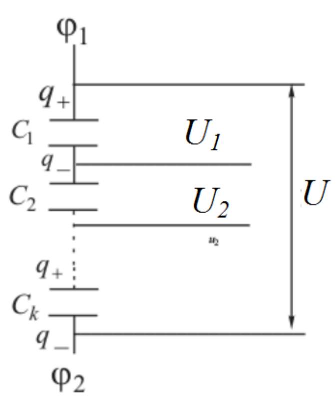


Рис. 5.9

Сумма этих напряжений равна разности потенциалов, приложенной к батарее:

$$U = \sum U_\kappa = \sum\frac{q}{C_k} = q\sum\frac{1}{C_k}, \qquad (19)$$

откуда получается, что:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_k}. \qquad (20)$$

При последовательном соединении конденсаторов складываются величины, обратные их емкостям. Согласно (18) доля общего напряжения, приходящегося на данный конденсатор, обратна его емкости. Необходимо, чтобы ни для одного из конденсаторов U_k не превышало указанное для него значение U_{max}.

Если все конденсаторы одинаковы и имеют емкость C, и предельное напряжение U_{max}, то при последовательном соединении

$$C = \frac{1}{N} C_1 \quad \text{и} \quad (U_{max})_{бат} = NU_{max},$$

где N – число конденсаторов.

5.5. Энергия электростатического поля

1. Энергия системы зарядов

Силы, с которыми взаимодействуют заряженные тела, консервативны (т.е. их работа не зависит от пути). Следовательно, система заряженных тел обладает потенциальной энергией. Найдем выражение для потенциальной энергии системы точечных зарядов. Работа переноса заряда q_1 из бесконечности в точку, удаленную от q_2 на r_{12} равна :

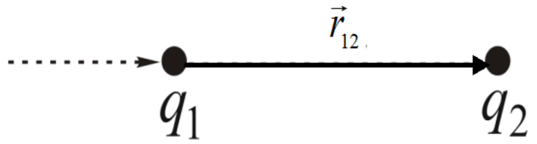


Рис. 5.10

$$A_1 = q_1\varphi_1 = q_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{r_{12}}, \qquad (21)$$

где φ_1 – потенциал, создаваемый зарядом q_2 в той точке, в которую перемещается заряд q_1 (рис. 5.10, ε=1).

Работа по переносу заряда q_2 из бесконечности в точку, удаленную от q_1 на расстояние r_{12} равна:

$$A_2 = q_2\varphi_2 = q_2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{r_{12}}, \qquad (22)$$

где φ_2 – потенциал, создаваемый зарядом q_1 в той точке, в которую перемещается заряд q_2 (рис.5.11).

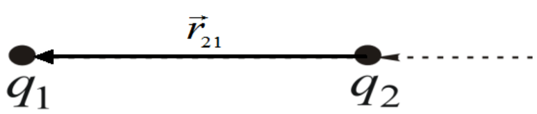


Рис. 5.11

Значения работ (21) и (22) одинаковы и каждое из них выражает энергию системы:

$$W = q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2. \qquad (23)$$

Для того, чтобы в выражение (23) энергии системы оба заряда входили симметрично, напишем (23) следующим образом:

$$W = \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2)\,. \tag{24}$$

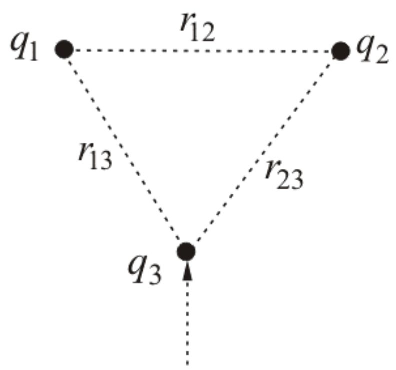


Рис. 5.12

Перенесем из бесконечности еще один точечный заряд q_3 и поместим его в точку, находящуюся на расстоянии r_{13} от заряда q_1 и на расстоянии r_{23} от заряда q_2 (рис. 5.12)

При этом совершим работу:

$$A_3 = q_3\varphi_3 = q_3\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right), \tag{25}$$

где φ_3 – потенциал, создаваемый зарядами q_1 и q_2 ($\varphi_3 = \varphi_1 + \varphi_2$) в той точке, в которую мы поместили заряд q_3 (рис. 5.12).

В сумме с A_1 или A_2 работа A_3 будет равна энергии трех зарядов:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right). \tag{26}$$

Выражение (26) можно привести к виду:

$$W = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{13}}\right) + q_2\left(\frac{q_1}{r_{12}} + \frac{q_3}{r_{23}}\right) + q_3\left(\frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2 + q_3\varphi_3)$$

где φ_1 – потенциал, создаваемый зарядами q_2 и q_3 в той точке, где находится заряд q_1 и т.д.

Можно убедиться в том, что в случае N зарядов потенциальная энергия системы будет равна:

$$W = \frac{1}{2}\sum_i \Sigma q_i\varphi_i\,, \tag{27}$$

где φ_i – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд q_i всеми зарядами, кроме i– го.

2. Энергия заряженного проводника.

Заряд q, находящийся на некотором проводнике, можно рассматривать как систему точечных зарядов Δq. Из предыдущего рассмотрения следует, что такая система будет обладать энергией, равной работе, которую нужно совершить, чтобы перенести все заряды Δq из бесконечности и расположить их на поверхности проводника.

Перенос из бесконечности на поверхность проводника первой порции заряда Δq не сопровождается совершением работы, так как потенциал проводника первоначально равен нулю.

В результате сообщения проводнику заряда Δq его потенциал становится отличным от нуля, вследствие чего перенос второй порции Δq уже требует совершения некоторой работы. Так как по мере увеличения заряда на проводнике потенциал его растет при перемещении каждой последующей порции заряда Δq, то должна совершаться все большая по значению работа:

$$\Delta A = \varphi \Delta q = \frac{q}{C}\Delta q, \tag{28}$$

где φ – потенциал проводника, обусловленный уже имеющимся на нем зарядом q, C – емкость проводника

Работа (28) идет на увеличение энергии проводника. Переходя к дифференциалам, имеем:

$$dW = \frac{1}{C} q dq. \tag{29}$$

Откуда после интегрирования получается выражение для энергии проводника:

$$W = \frac{q^2}{2C} + const. \tag{30}$$

Так как энергия незаряженного проводника равна нулю, то $const=0$. Учитывая, что $C = \frac{q}{\varphi}$, можно записать:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2}. \tag{31}$$

3. Энергия заряженного конденсатора

Процесс возникновения на обкладках конденсатора зарядов $+q$ и $-q$ можно представить так, что от одной обкладки последовательно отнимаются очень малые порции заряда Δq и перемещаются на другую обкладку. Работа переноса очередной порции равна:

$$\Delta A = \Delta q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta q U, \tag{32}$$

где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - напряжение на конденсаторе (разность потенциалов между обкладками).

Произведя замену в формуле $(C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U})$ и, переходя к дифференциалам, получим:

$$dW = dA = Udq = \frac{q}{C} dq. \qquad (33)$$

Откуда после интегрирования имеем:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2}. \qquad (34)$$

Выражение (105) позволяет найти механическую силу, с которой пластины притягивают друг друга (*пондеромоторную силу*). Предположим, что первоначальное расстояние x между пластинами увеличиваем на величину dx. При этом приложенная к пластине сила совершает работу $dA = Fdx$ за счет уменьшения потенциальной энергии системы: $Fdx = -dW$,откуда

$F = -\frac{dW}{dx}$. Так как $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 x}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}$ (35)

Тогда сила притяжения будет равна:

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{2\varepsilon\varepsilon_0 S}, \qquad (36),$$

где знак минус означает, что сила стремится уменьшить расстояние x между пластинами.

4. Энергия электростатического поля

Энергию конденсатора можно выразить через величины, характеризующие электростатическое поле в зазоре между обкладками:

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{U}{d}\right)^2 Sd. \qquad (37)$$

Так как $\frac{U}{d} = E$ (для однородного электростатического поля), а $Sd=V$ – объем, занимаемый полем, то:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V. \qquad (38)$$

<u>Опыт показывает, что носителем энергии является электростатическое поле</u> (электромагнитные волны переносят энергию, например, распространение радиоволн или света).

Если поле однородно (поле плоского конденсатора), заключенная в нем энергия распределяется в пространстве с постоянной плотностью ω, равной энергии поля, деленной на заполняемый полем объем. Следовательно, плотность энергии поля плоского конденсатора:

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}. \qquad (39)$$

Эта формула справедлива и для неоднородного поля. Так как $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, то

$$\omega = \frac{DE}{2}, \qquad (40)$$

или

$$\omega = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} \qquad (41)$$

В изотропном диэлектрике направления векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ совпадают и поэтому (41) можно придать вид:

$$\omega = \frac{\vec{D}\vec{E}}{2}. \qquad (42)$$

Заменив в этой формуле $\vec{D}$ на $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ получим:

$$\omega = \frac{\vec{E}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})}{2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{EP}{2}. \qquad (43)$$

Первое слагаемое в этом выражении совпадает с плотностью энергии поля $\vec{E}$ в вакууме. Второе слагаемое – энергия, затрачиваемая на поляризацию диэлектрика.

Таким образом, выражения (40), (41), (42) включают в себя, кроме собственно энергии поля $\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$, ещё и энергию $\frac{EP}{2}$, затрачиваемую при создании поля на поляризацию диэлектрика.

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме *V*. Для этого нужно вычислить интеграл:

$$W = \int_V \omega dV = \int_V \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} dV \qquad (44)$$

<u>Выражение (44) является общим для нахождения энергии электрического поля.</u> Если *E=const*, т.е. поле является однородным, оно превращается в выражение (38).

В качестве примера вычислим энергию поля заряженного проводящего шара радиуса *R*, помещенного в однородный безграничный диэлектрик. Поле, создаваемое заряженным шаром является неоднородным, напряженность поля заряженного шара является функцией *r*, т.е.,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{\varepsilon r^2}. \qquad (45)$$

Разобьем окружающее шар пространство на концентрические шаровые слои толщиной dr. Объем слоя равен $dV = 4\pi r^2 dr$

В нем заключена энергия:

$$dW = \omega dV = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}. \qquad (46)$$

Энергия поля равна:

$$W = \int dW = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (47)$$

Согласно (77), $C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ есть емкость шара.

Полученное выражение совпадает с выражением для энергии проводника, обладающей емкостью C и несущего на себе заряд q (14).

Контрольные вопросы

1. Каковы напряженность и потенциал поля, а также распределение зарядов внутри и на поверхности заряженного проводника?
2. На чем основана электростатическая защита?
3. Как можно увеличить заряд проводника?
4. Что такое емкость проводника? Что такое конденсатор?
5. От чего зависит емкость конденсатора?
6. Как определить энергию системы зарядов?
7. Как определяется энергия поля?