Тема 3. ПОТЕНЦИАЛ И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

3.1. Работа сил электростатического поля

Сила, действующая на точечный заряд, находящийся в поле другого неподвижного точечного заряда, является центральной. Направление силы, действующей в любой точке пространства на заряд, проходит через центр заряда, создающего поле, а значение силы зависит только от расстояния до этого заряда $f = f(r)$ до точки наблюдения. (Например, поле силы тяжести является полем центральных сил).

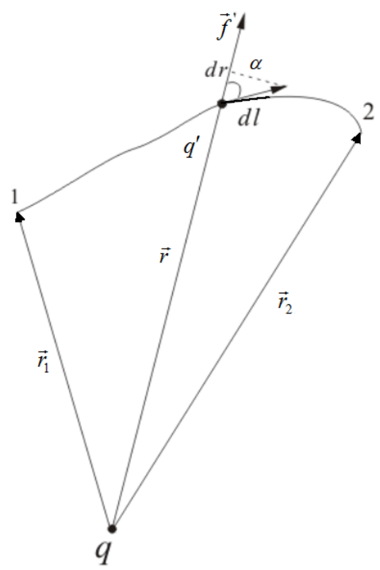

Рис. 3,1

Если тело поставлено в такие условия, что в каждой точке пространства оно подвержено воздействию других тел с силой, закономерно изменяющейся от точки к точке, то говорят, что это тело находится в поле сил. Центральное поле сил потенциально. Убедимся, что электрическое поле потенциально. Вычислим работу, которая совершается силами поля неподвижного точечного заряда q над перемещающимся в этом поле точечным зарядом q' (рис. 3.1). Работа на элементарном пути dl равна: $dA = (\vec{F}d\vec{l})$ или

$$dA = Fdl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dl\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr,$$

так как $dl\cos\alpha = dr$. Отсюда на пути 1–2

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad (1)$$

Видно, что работа не зависит от пути, по которому перемещался в электрическом поле заряд q', а зависит лишь от начального и конечного положений этого заряда (от r_1 и r_2). Следовательно, силы, действующие на заряд q' в поле неподвижного заряда q, являются консервативными, а поле этих сил потенциальным. Этот вывод легко распространяется на поле любой системы неподвижных зарядов, так как сила $\vec{f}$, действующая на точечный заряд q' в таком поле, может по принципу суперпозиции быть представлена в виде $\vec{f}=\sum\vec{f}_i$, где $\vec{f}_i$ – сила, обусловленная i-м зарядом создающей поле системы. Работа в этом случае равна алгебраической сумме работ, совершаемых отдельными силами: $A=\sum A_i$. Каждое из слагаемых в правой части этого выражения не зависит от пути. Поэтому не зависит от пути и работа A.

Из механики известно, что работа потенциальных сил на замкнутом пути равна нулю. Работа, совершаемая силами поля над зарядом q' при обходе по замкнутому контуру, может быть представлена как $\oint q'E_l dl$, где E_l–проекция вектора $\vec{E}$ на направление элементарного перемещения dl, то, следовательно:

$$\oint E_l dl = 0 \qquad (2)$$

Это соотношение должно выполняться для любого замкнутого контура. Следует иметь в виду, что (21) справедливо только для электростатического поля. Поле движущихся зарядов (т.е. поле, изменяющееся со временем) не является потенциальным. Следовательно, условие (21) для него не выполняется.

Выражение вида $\oint A_l dl$ называется циркуляцией вектора $\vec{A}$ по данному контуру. Таким образом, *характерным для электростатического поля является то, что циркуляция вектора напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю.*

3.2. Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

Итак, мы утверждаем, что циркуляция вектора $\vec{E}$ в любом электростатическом поле равна нулю, т.е. $\oint E_l dl = 0$. Это утверждение называют теоремой о циркуляции вектора $\vec{E}$.

Пусть в заданном поле с напряженностью $\vec{E}$ перемещается заряд по замкнутому пути 1а2б1. Для доказательства теоремы разобьем произвольный замкнутый путь на две части 1а2 и 2б1 (см. рисунок). Найдем работу по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2. Так как работа в заданном поле не зависит от формы пути, то работа по перемещению заряда по пути 1а2 равна работе по перемещению заряда по пути 1б2 или $q\int_{1a}^{2}\vec{E}d\vec{l} = -q\int_{1б}^{2}\vec{E}d\vec{l}$

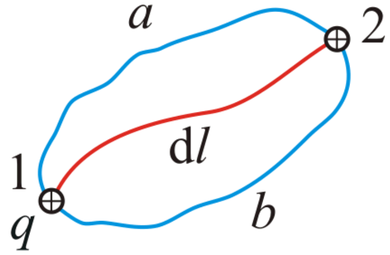

Рисунок 3.2

Из сказанного выше следует, что

$$\int_{1a}^{2}(\vec{E}d\vec{l}\,) = \int_{2б}^{1}(\vec{E}d\vec{l}\,)$$

(Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q\oint(\vec{E}d\vec{l}) = q\int_{1}^{2}(\vec{E}d\vec{l}) - q\int_{2}^{1}(\vec{E}d\vec{l}) = 0. \qquad \textbf{(3)}$$

или $\oint(\vec{E}d\vec{l}) = 0$ **(4)**

Поле, обладающее такими свойствами, называется ***потенциальным***. *Любое электростатическое поле является потенциальным.*

Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам. Рассмотрим два простых примера, подтверждающих это заключение.

1. *Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В самом деле, если это не так, и какая-то линия $\vec{E}$ – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора* $\vec{E}$: $\oint(\vec{E}d\vec{l}) = 0$. А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора $\vec{E}$ не равна нулю.

2. *Электростатическое поле не вихревое.* В ряде случаев для решения задачи о нахождении поля по известному неоднородному распределению зарядов с плотностью $\rho(x, y, z)$, нужны уравнения, содержащие характеристики поля в данной точке пространства или в ее малой окрестности (такое как, например, теорема Остроградского- Гаусса в дифференциальной форме). Получим такое уравнение, отражающее потенциальный характер электростатического поля.

Воспользуемся теоремой Стокса, которая гласит, что циркуляция вектора $\vec{A}$ по произвольному контуру L равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, натянутую на этот контур, т.е. $\oint_L \vec{A}d\vec{l} = \int_S (rotA)_n dS$. В случае электростатического поля имеем $\oint_L(\vec{E}d\vec{l}\,) = \int_S (rotE)_n dS = 0$, поэтому в силу произвольности вида поверхности получим $rot\vec{E} = 0$. Следовательно, из потенциального характера электростатического поля вытекает, что *электростатическое поле не вихревое, если* $rot\vec{E} = 0$. (5)

3.3. Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в поле потенциальных сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля. Следовательно, работа может быть представлена как разность значений потенциальных энергий, которыми обладает заряд q' в точках 1 и 2 поля заряда q

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_2} = W_{P_1} - W_{P_2}$$

Можно показать также, что, так как $f = -\frac{dW_P}{dr}$, $dW_P = -fdr$

$$W_P = -\int \frac{qq'dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + const = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} + const.$$

Отсюда для потенциальной энергии заряда q' в поле заряда q получаем:

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + const \qquad (6)$$

Значение *const* в (6) обычно выбирают таким образом, чтобы при удалении заряда q' на бесконечность ($r = \infty$) потенциальная энергия обращалась в нуль. При этом условии получается, что

$$W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}. \qquad (7)$$

Будем считать q' пробным зарядом. Тогда потенциальная энергия, которой обладает пробный заряд, зависит не только от его значения q', но и от значения q и r, определяющих поле. Следовательно, эта энергия может быть использована для описания поля, подобно тому, как была использована для этой цели сила, действующая на пробный заряд.

Разные пробные заряды $q'_{пр}$, $q''_{пр}$ будут обладать в одной и той же точке поля различной энергией W'_P, W''_P и т.д. Однако отношение $\frac{W_P}{q'_{пр}}$ будет для всех зарядов одно и то же. Величина

$$\varphi = \frac{W_P}{q_{пр}} \qquad (8)$$

называется потенциалом поля в данной точке и используется наряду с напряженностью поля $\vec{E}$, для описания электрических полей.

Как следует из (8) потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.

Таким образом, для потенциального поля точечного заряда получаем следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \qquad (9)$$

Если поле создано системой точечных зарядов q_1, q_2, …, q_n, находящихся на расстояниях соответственно r_1, r_2,…, r_n до точки поля, в которой находится заряд

q', то работа, совершаемая силами этого поля над зарядом q', будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum A_i \; .$$

Но каждая из работ A_i равна:

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}}\right),$$

где r_{i1} – расстояние от заряда q_i до начального положения заряда q', r_{i2} – расстояние от заряда q_i до конечного положения заряда q'.

Следовательно:

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_{i2}}.$$

Сопоставляя это выражение с соотношением $A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2}$, получаем для потенциальной энергии заряда q' в поле системы зарядов выражение:

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_i}, \qquad (10)$$

откуда

$$\varphi = \frac{W_P}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}. \qquad (11).$$

Следовательно, потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

Из соотношения $\varphi = \dfrac{W_p}{q_{ïð}}$ вытекает, что заряд q, находящийся в точке поля с потенциалом φ, обладает потенциальной энергией $W_p = q\varphi$. Следовательно, работа сил поля над зарядом q может быть выражена через разность потенциалов:

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (12)$$

Таким образом, работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках. Если заряд q из точки с потенциалом φ удаляется на бесконечность (где по условию потенциал равен нулю), работа сил поля будет равна

$$A_\infty = q\varphi \text{ или } \varphi = \frac{A_\infty}{q},$$

т. е, потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля в бесконечность, или работе, которую надо совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

За единицу потенциала следует принять потенциал в такой точке поля, для перемещения заряда в которую из бесконечности необходимо совершить работу, равную

1 Джоулю (система единиц “Си”)

$$1Дж = 1Кл \cdot 1В$$

Отсюда $1В = \dfrac{1Дж}{1Кл}$.

3.4. Диполь в электростатическом поле

Электрическим диполем называется совокупность двух равных зарядов противоположного знака, находящихся друг от друга на расстоянии l, малом по сравнению с их расстоянием до точек, в которых определяется поле диполя.

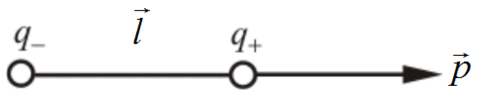

Рис. 3.3

Произведение заряда на расстояние между зарядами $p=ql$ называется *дипольным моментом*. Для полного определения диполя нужно задать еще и ориентацию оси диполя в пространстве. В соответствии с этим дипольный момент следует рассматривать как вектор $\vec{p}$. Этому вектору приписывают направление от отрицательного заряда к положительному (рис.3.3). Если ввести радиус – вектор $\vec{l}$ проведенный от $-q$ к $+q$, то дипольный момент можно представить в виде:

$$\vec{p} = q\vec{l} \ . \tag{13}$$

Если диполь поместить в однородное электрическое поле, образующие диполь заряды $-q$ и $+q$ окажутся под действием равных по величине, но противоположных по направлению сил $\vec{f}_1$ и $\vec{f}_2$ (рис. 14). Эти силы образуют пару сил, плечо которой равно $l \cdot \sin\alpha$, т.е., зависит от ориентации диполя относительно поля. Модуль каждой из сил равен qE. Умножив его на плечо, получим значение момента пары сил, действующих на диполь:

$$M = qEl\sin\alpha = pE\sin\alpha\,, \tag{14}$$

где p – электрический момент диполя.

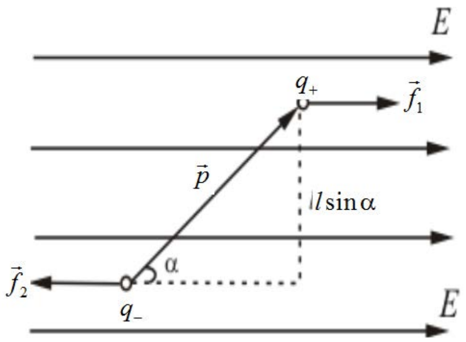

Рис. 3.4

В векторном виде:

$$\vec{M} = \left[\vec{p}\vec{E}\right]. \tag{15}$$

Момент $\vec{M}$ стремится повернуть диполь так, чтобы его момент $\vec{p}$ установился по направлению поля.

Чтобы увеличить угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{E}$ на $d\alpha$ нужно совершить работу против сил, действующих на диполь:

$$dA = Md\alpha = pE\sin\alpha d\alpha \tag{15}$$

Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии W, которой обладает диполь в электрическом поле, т.е.:

$$dW = pE\sin\alpha d\alpha \tag{16}$$

Интегрирование (16) дает для потенциальной энергии диполя в электрическом поле выражение :

$$W = -pE\cos\alpha + const \tag{17}$$

Полагая *const=0*, получим

$$W = -pE\cos\alpha = -(\vec{p}\vec{E}) \tag{18}$$

Выбрав *const=0*, считаем, что энергия диполя будет равна нулю, когда диполь устанавливается перпендикулярно к направлению поля. Наименьшее значение энергии, равное (*-pE)*, получается при ориентации диполя по направлению поля, наибольшее, равное *pE*, когда $\vec{p}$ направлен в сторону, противоположную по направлению вектору $\vec{E}$.

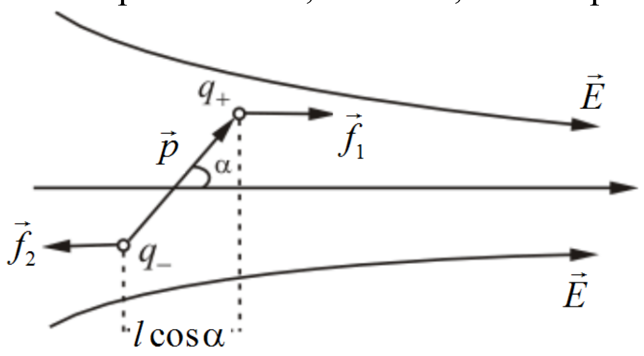

Рис. 3.5

В неоднородном поле силы, действующие на заряды диполя, не одинаковы. При малых размерах диполя силы f_1 и f_2 можно считать приближенно коллинеарными. Предположим, что поле изменяется быстрее всего в направлении *x*, совпадающем с направлением $\vec{E}$ в том месте, где расположен диполь (рис. 3.5). Положительный заряд диполя смещен относительно отрицательного в направлении *x* на величину $\Delta x = l\cos\alpha$. Поэтому напряженность поля в точках, где помещаются заряды, отличается на ΔE. Так как сумма сил $f_1 = qE_1$ и $f_2 = -qE_2$

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2; \text{ или } \quad f = q(E_1 - E_2) = q\Delta E\,, \tag{19}$$

$\Delta E = \dfrac{dE}{dx} l\cos\alpha$, то

$$f = q\frac{dE}{dx} l\cos\alpha = p\frac{dE}{dx}\cos\alpha\,, \tag{20}$$

где $\dfrac{dE}{dx}$ – градиент вектора напряженности электрического поля. Таким образом, в неоднородном электрическом поле, кроме вращающегося момента, действует сила f, под действием которой диполь будет либо втягиваться в область более сильного поля ($\alpha<90^0$), либо выталкиваться из нее ($\alpha>90^0$).

Выражение для силы можно получить из (18), учтя, что $f = -\dfrac{dW}{dx}$.

<u>3.5. Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом</u>

Напряженность электрического поля – <u>величина, численно равная силе, действующей на заряд</u>. <u>Потенциал</u> φ <u>– величина, численно равная потенциальной энергии заряда</u>. Таким образом, между этими величинами должна существовать связь, аналогичная связи между потенциальной энергией и силой (т.е. $f = -\frac{dW}{dx}$). Работа сил поля над зарядом q на отрезке пути dl может быть представлена как $dA = qE_l dl$, а убыль потенциальной энергии заряда, которая при этом будет возникать: $-dU = -d(q\varphi) = -qd\varphi$. Откуда из равенства $dA = -dU$ находим:

$$qE_l dl = -qd\varphi \text{ или } E_l = -\frac{d\varphi}{dl}, \tag{21}$$

где через l обозначено произвольно выбранное направление.

Тогда,

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}, \tag{22}$$

Откуда

$$\vec{E} = \vec{i}\,E_x + \vec{j}\,E_y + \vec{k}\,E_z = -\left(\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}\right), \tag{23}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты координатных осей, т. е., единичные вектора. Вектор с компонентами $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, где φ – скалярная функция координат x, y, z называется <u>градиентом</u> функции φ и обозначается символом $grad\varphi$ (или $\nabla\varphi$, где ∇ – оператор набла). Таким образом, градиент потенциала:

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz} \tag{24}$$

и из (23) и (24) следует , что

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi \tag{25}$$

Так как градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой, то градиентом потенциала $\frac{d\vec{\varphi}}{dr}$ (где *r*–радиус-вектор) называется вектор, направленный в сторону наиболее быстрого возрастания потенциала, численно равный быстроте его изменения на единицу длины в этом направлении.

Поскольку $\overrightarrow{grad}\,\varphi$ – векторная величина, то его модуль выражается как:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}, \tag{26}$$

подобно тому, как модуль вектора $\vec{E}$:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} \tag{27}$$

Знак “–” (25) указывает на то, что напряженность $\vec{E}$ направлена в сторону убывания потенциала. Формула (25) позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке или решить обратную задачу, т.е., по заданным значения $\vec{E}$ в каждой точке найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля.

3.6. Эквипотенциальные поверхности

Потенциал электростатического поля представляет собой функцию, меняющуюся от точки к точке. Однако, во всяком реальном случае можно выделить совокупность точек, потенциалы которых одинаковы.

Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью.

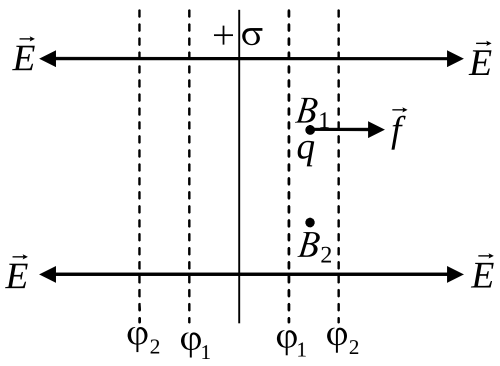

Рис. 3.6

Возьмем равномерно заряженную бесконечную плоскость (рис. 3.6). Поле, создаваемое такой плоскостью однородно, а линии напряженности нормальны к плоскости. Отсюда следует, что работа перемещения заряда из некоторой точки B_1 в любую другую точку B_2, находящуюся на таком же расстоянии от заряженной поверхности, что и точка B_1 равна нулю. Действительно, при перемещении некоторого заряда q по прямой B_1B_2 сила, действующая на заряд со стороны поля, будет все время перпендикулярна к перемещению, а, следовательно, ее работа равна нулю. Но эта работа может быть представлена, с другой стороны, в виде:

$$A = q(\varphi_{B_1} - \varphi_{B_2}) = 0, \qquad (28)$$

где φ_{B_1} и φ_{B_2} – соответственно потенциалы точек B_1 и B_2. Отсюда, так как $A = 0$, то $\varphi_{B_1} = \varphi_{B_2}$, т.е., потенциалы точек, равноудаленных от заряженной плоскости, одинаковы. Таким образом, поверхности равного потенциала (эквипотенциальные поверхности) являются плоскостями, параллельными заряженной плоскости. Если плоскость заряжена положительно, то значение потенциала убывает по мере удаления от заряженной плоскости. Очевидно, что поверхности равного потенциала расположены симметрично по обе стороны от заряженной плоскости.

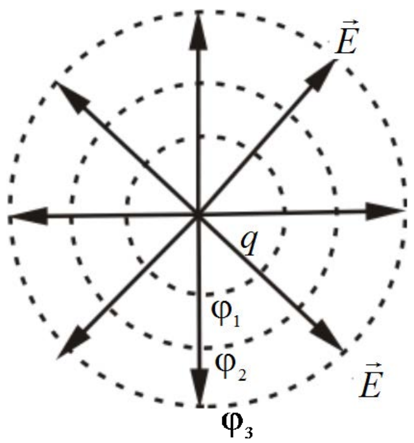

Рис. 3.7

Эквипотенциальные поверхности поля точечного заряда это сферы с радиусом r , центр которых находится в центре точечного заряда, т.е. $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ (рис. 3.7). На рис. 3.6 и рис. 3.7 вектор напряженности $\vec{E}$ перпендикулярен эквипотенциальным поверхностям.

Покажем, что вектор напряженности перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

Рассмотрим работу по перемещению заряда по поверхности равного потенциала на малом участке пути ΔS (рис. 3.7). При этом, работа электрической силы $\vec{f} = q\vec{E}$ на данном пути будет:

$$\Delta A = f\Delta S \cos\alpha = q\mathrm{E}\Delta S \cos\alpha, \qquad (29)$$

где α – угол между направлением силы f и перемещением ΔS. С другой стороны, эта работа может быть выражена как произведение величины перемещающегося заряда на разность потенциалов в начальном и конечном положениях заряда, т.е. $\Delta A = q(\varphi_A - \varphi_B)$.

Так как перемещение идет по эквипотенциальной поверхности, то разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B = 0$ и $q\mathrm{E}\Delta S\cos\alpha = 0$, или cosα = 0, значит α = 90^0 т.е. угол между направлением силы $\vec{f}$ и перемещением ΔS равен 90^0. Но $\vec{f} = q\vec{E}$, т.е. направления $\vec{f}$ и $\vec{E}$ совпадают, поэтому угол между $\vec{E}$ и ΔS, α=90^0 т.е. *направление вектора напряженности электростатического поля всегда перпендикулярно к эквипотенциальной поверхности.*

Эквипотенциальных поверхностей вокруг заряженного тела можно провести сколько угодно много. По густоте эквипотенциальных поверхностей можно судить о величине $\vec{\mathrm{E}}$, однако при условии, что разность потенциалов между двумя соседними эквипотенциальными поверхностями равна постоянной величине.

Формула $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ выражает связь потенциала с напряженностью и позволяет по известным значениям φ найти напряженность поля в каждой точке. Можно решить и обратную задачу, т.е. по известным значениям $\vec{\mathrm{E}}$ в каждой точке поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками поля. Для этого воспользуемся тем, что работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из точки 1 в точку 2, может быть, вычислена как:

$$A_{12} = q\int_1^2 (\vec{\mathrm{E}}, d\vec{\mathrm{l}}).$$

С другой стороны работу можно представить в виде:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2), \text{ тогда } \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{\mathrm{E}}, d\vec{\mathrm{l}}).$$

Интеграл можно брать по любой линии, соединяющие точку 1 и точку 2, т.к. работа сил поля не зависит от пути.

При обходе по замкнутому контуру $\varphi_1 = \varphi_2$ получим:

$\oint (\vec{\mathrm{E}}, d\vec{\mathrm{l}}) = 0,$

т.е. пришли к известной нам теореме о циркуляции вектора напряженности: *циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю.*

Поле, обладающее этим свойством, называется потенциальным.

Из обращения в нуль циркуляции вектора $\vec{E}$ *следует, что линии* $\vec{E}$ *электростатического поля не могут быть замкнутыми: они начинаются на положительных зарядах (**истоки**) и на отрицательных зарядах заканчиваются (**стоки**) или уходят в бесконечность.*

Обобщим теорему Гаусса и теорему о циркуляции вектора напряженности электростатического поля в вакууме. Так как $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$, а $\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, то $-\varepsilon_0 div(grad\varphi) = \rho$. Поскольку $div(grad\varphi) = \Delta\varphi$ ($\Delta\varphi$- оператор Лапласа), то для потенциала φ получим выражение $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ или $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, которое называется *уравнением Пуассона*.

Это уравнение позволяет по известному распределению заряда $\rho = \rho(x, y, z)$ и заданным граничным условием для потенциала φ определить значения $\varphi = \varphi(x, y, z)$ во всех точках поля, а затем по формуле $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\varphi$ найти напряженность $\vec{E}(x, y, z)$ поля, т.е. решить прямую задачу электростатики.

3.7. Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

Установленная связь между напряженностью и потенциалом позволяет по известной напряженности поля найти разность потенциалов между двумя произвольными точками этого поля.

Рассмотрим несколько примеров вычисления разности потенциалов между точками поля, созданного некоторыми заряженными телами.

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, определяется по формуле $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, где σ – поверхностная плотность заряда. Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях x_1 и x_2 от плоскости, равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)$.

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

Напряженность электростатического поля между заряженными плоскостями, найденная с помощью теоремы Остроградского-Гаусса $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, где σ = q/S – поверхностная плотность заряда.

Так как напряженность связана с потенциалом

$$E = -\frac{d\varphi}{dl}, \qquad \text{то} \qquad d\varphi = -E\,dl, \qquad (30)$$

Теперь, чтобы получить выражение для разности потенциалов любыми двумя точками, находящимися на расстояниях x_1 и x_2 между плоскостями, проинтегрируем выражение (30):

$$\int_1^2 d\varphi = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2} dx;$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1) \text{ **или** } \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(x_2 - x_1). \qquad \textbf{(31)}$$

При $x_1 = 0$ и $x_2 = d$, разность потенциалов между плоскостями

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}. \qquad \textbf{(32)}$$

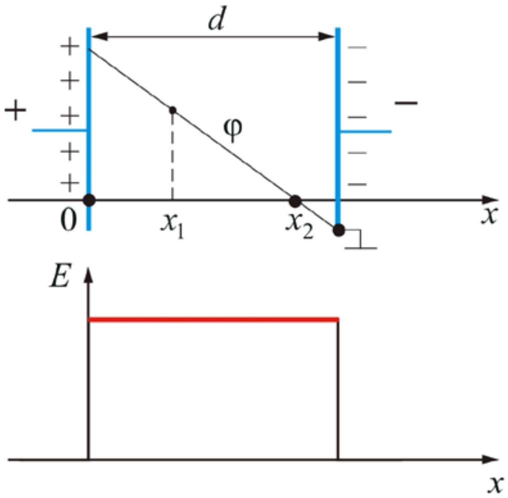

Рисунок 3.8

На рисунке изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от расстояния между плоскостями.

3. Поле бесконечно длинной равномерно заряженной цилиндрической поверхности

С помощью теоремы Остроградского-Гаусса мы показали, что, т.к. $\Phi_E = \oint_S E\,dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$, то (рис. 3.9)

$$E=\begin{cases}0-\text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов}\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\ \text{или}\ \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 Rl}\ \text{на поверхности цилиндра}\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ \text{или}\ \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 rl}\ \text{вне цилиндра.}\end{cases} \qquad \textbf{(33)}$$

где $\lambda=\dfrac{q}{l}$ – линейная плотность заряда.

Тогда, т.к. $\mathrm{d}\varphi=-E\mathrm{d}r$; $\int\limits_1^2 \mathrm{d}\varphi=-\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{r_1}^{r_2}\dfrac{\mathrm{d}r}{r}$, отсюда следует разность потенциалов в произвольных точках 1 и 2 будет равна:

$$\varphi_2-\varphi_1=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}=-\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R}=\text{const}-\text{внутри и на поверхности цилиндра}\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R}\ -\text{вне цилиндра.}\end{cases} \qquad \textbf{(34)}$$

На рисунке 3.6 изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r. (Здесь и далее E – изображена сплошной линией, а φ – пунктирной).

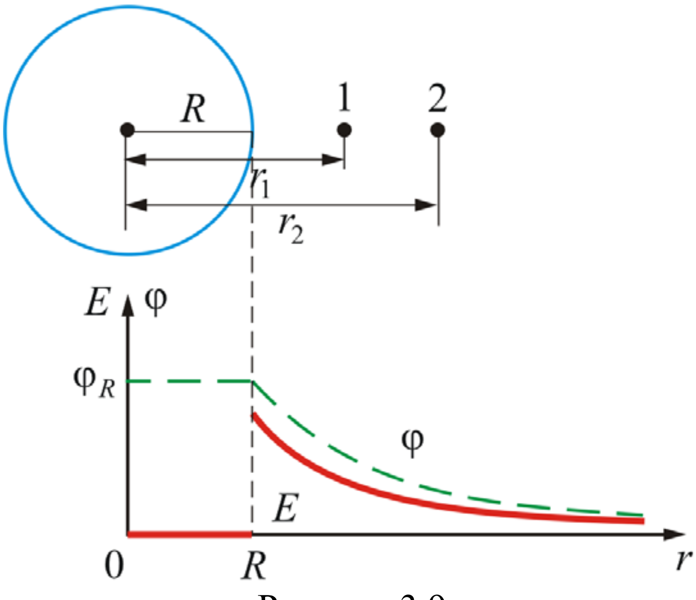

Рисунок 3.9

3. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

Рассматривая примеры применения теоремы Остроградского-Гаусса мы нашли, что (рис. 3.10)

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри меньшего и вне большего цилиндров зарядов нет} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} - \text{между цилиндрами, когда } R_1 < r < R_2. \end{cases} \qquad \textbf{(35)}$$

Отсюда так же, как и в предыдущем случае, разность потенциалов будет равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \text{const} - \text{внутри меньшего цилиндра } (r < R_1) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R_1} - \text{между цилиндрами } (R_1 < r < R_2) \\ 0 \ - \ \text{вне цилиндров.} \end{cases} \qquad \textbf{(36)}$$

Таким образом, внутри меньшего цилиндра имеем $\varphi = \text{const}$, $E = 0$, между обкладками потенциал уменьшается по логарифмическому закону, а вторая обкладка (вне цилиндров) экранирует электрическое поле и φ и E равны нулю.

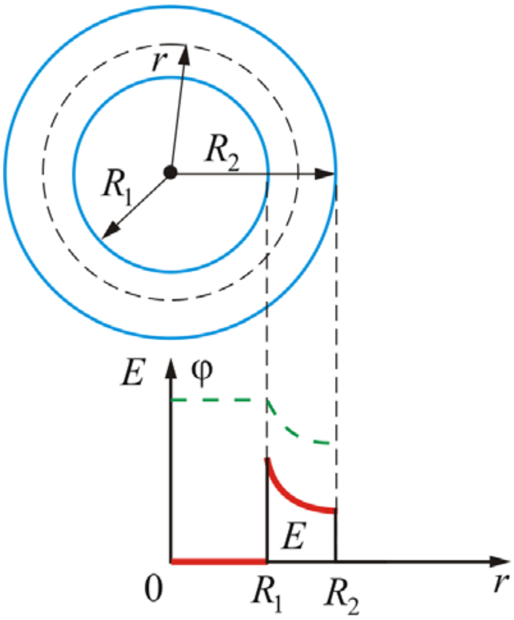

Рисунок 3.10

На рис. 3.10 изображена зависимость напряженности E и потенциала φ от r.

4. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Рассматривая примеры применения теоремы Остроградского-Гаусса мы нашли, что напряженность поля сферы определяется формулой : $E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ (рис. 3.11). А т.к. $d\varphi = -E dr$, то

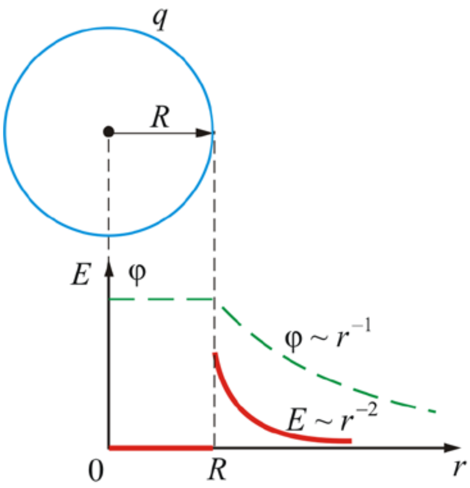

Рисунок 3.11

$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. **Если принять r_1=r , а r_2=∞, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением** $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. **Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен** $\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ **, так как напряженность поля внутри сферической поверхности равна нулю.**

Отсюда имеем

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = \text{const} - \text{внутри и на поверхности сферы } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{вне сферы } (r > R). \end{cases} \quad (37)$$

5. Поле объемно заряженного шара

Имеем шар радиусом R с общим зарядом q, т.е. заряженный с объемной плотностью

$$\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}.$$

Напряженность поля объемно заряженного шара радиусом R, с общим зарядом q, вне шара (r>R) вычисляется по формуле $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$. Разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1 и r_2 от центра шара (r_1>R, r_2>R, r_2>r_1), определяется формулой $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Если принять, что r_1=r , а r_2=∞, то потенциал вне сферической поверхности определяется выражением

$\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$. В частности, при $r=R$, потенциал поверхности сферы, относительно точки с нулевым потенциалом равен $\varphi(R) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$ (нулевой уровень потенциала нами выбран для точки $r_2=\infty$).

В любой точке, находящейся внутри шара на расстоянии r' от его центра ($r'<R$), напряженность поля определяется формулой $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{R^3}r'$. Следовательно, разность потенциалов между двумя точками, лежащими на расстояниях r_1' и r_2' от центра шара равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1^1}^{r_2^1} E_r dr = \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[(r_1^1)^2 - (r_2^1)^2\right]$.

Счетом выбора нулевого уровня потенциала в точке $r_2=\infty$ потенциал любой точки внутри заряженного шара можно найти следующим образом:

$\varphi = \varphi(R) - \int\limits_R^r E_r dr$. После интегрирования, получим $\varphi = \dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} + \dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2)$.

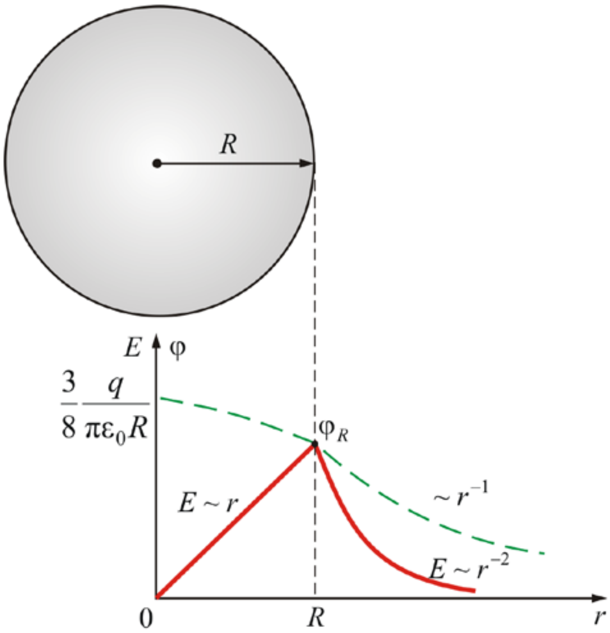

Рисунок 3.12

Если учесть, что $\rho = \dfrac{3q}{4\pi R^3}$, то

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \text{в центре шара } (r=0) \\ \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \dfrac{r^2}{R^2}\right) - \text{внутри шара } (r \le R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \text{на поверхности и вне шара } (r \ge R). \end{cases} \qquad (38)$$

Из полученных соотношений можно сделать следующие ***выводы***.

- *С помощью теоремы Гаусса сравнительно просто можно рассчитать E и φ от различных заряженных поверхностей.*
- *Напряженность поля в вакууме изменяется скачком при переходе через заряженную поверхность.*
- *Потенциал поля – всегда непрерывная функция координат.*

Контрольные вопросы

1. Как показать, что электростатическое поле потенциально?

2. Что такое потенциал?

3. Что называется циркуляцией вектора напряженности?

4. Какова связь напряженности и потенциала? Как по картине эквипотенциальных поверхностей нарисовать картину силовых линий поля?

5. Чему равна работа по перемещению заряда по эквипотенциальной поверхности?

6. Приведите примеры расчета разности потенциалов простейших электростатических полей.

7. Как ведет себя диполь во внешнем электростатическом поле?