Тема 2. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

2.1. Силовые линии напряженности электростатического поля

Электростатическое поле можно задать, указав для каждой точки величину и направление вектора $\vec{E}$. Совокупность этих векторов образует поле вектора напряженности электростатического поля. Графическое изображение электростатического поля с помощью вектора напряженности $\vec{E}$ в различных точках поля очень неудобно. Векторы напряженности при этом накладываются друг на друга, и получается весьма запутанная картина. Более наглядным является метод, предложенный М. Фарадеем изображения электростатических полей с помощью силовых линий напряженности. *Силовые линии напряженности – это линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора* $\vec{E}$. Линии напряженности направлены так же как вектор $\vec{E}$ поля в рассматриваемой точке. Например, на рис.2 линии напряженности направлены слева направо. Линии напряженности не пересекаются, т.к. в каждой точке поля вектор $\vec{E}$ имеет только одно определенное направление. Линии напряженности начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном. *Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единицу поверхности, перпендикулярной к линиям напряженности, было равно численному модулю вектора* $\vec{E}$. Тогда по картине линий напряженности можно судить о направлении и значении вектора $\vec{E}$ в разных точках пространства (рис. 2.1).

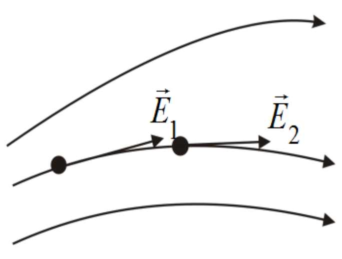


Рис.2

Однородным *называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению,* т.е. $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{const}$. Однородное электростатическое поле изображается параллельными силовыми линиями на равном расстоянии друг от друга (такое поле существует, например, между пластинами конденсатора) (рисунок).

В случае точечного заряда, линии напряженности исходят из положительного заряда и уходят в бесконечность; и из бесконечности входят в отрицательный заряд. Т.к. $E \sim 1/r^2$, то и густота силовых линий обратно пропорциональна квадрату расстояния от заряда. Однако площадь поверхности сферы, через которую проходят эти линии сама возрастает пропорционально квадрату расстояния, поэтому общее число линий остается постоянным на любом расстоянии от заряда.

Для системы зарядов, как видим, силовые линии направлены от положительного заряда к отрицательному (рисунок 2.2).

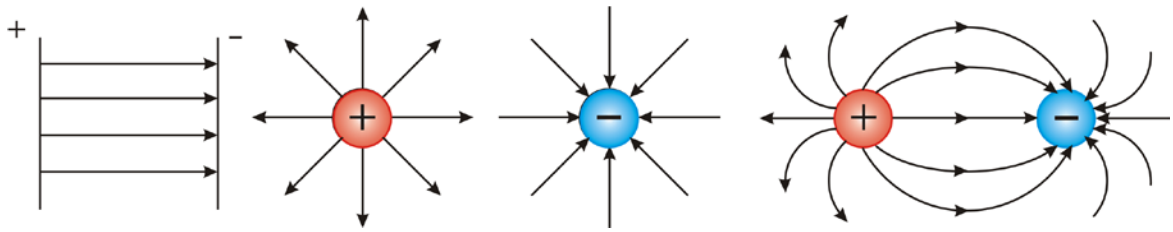


Рисунок 2.2

Из рисунка 2.3 видно, так же, что густота силовых линий может служить показателем величины $\vec{E}$.

Густота силовых линий должна быть такой, чтобы единичную площадку, нормальную к вектору напряженности пересекало такое их число, которое равно модулю вектора напряженности $|\vec{E}|$, т.е.

$$|\vec{E}| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

Пример 1: если на рисунке 2.3 выделить площадку, $S = 2\,\text{м}^2$, то напряженность изображенного поля будет равна

$$|\vec{E}| = \frac{\Phi}{S} = \frac{4}{2} = 2\frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

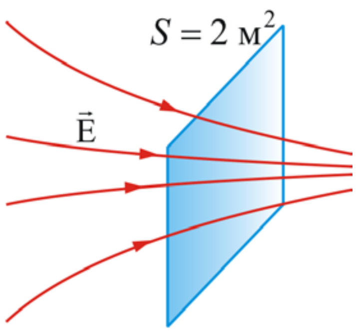


Рисунок 2.3

Пример 2: площадка $S = 3\text{м}^2$ находится в однородном поле 100 Н/Кл. Сколько линий пересекает эту площадку, если угол составляет 30º (рисунок 2.4).

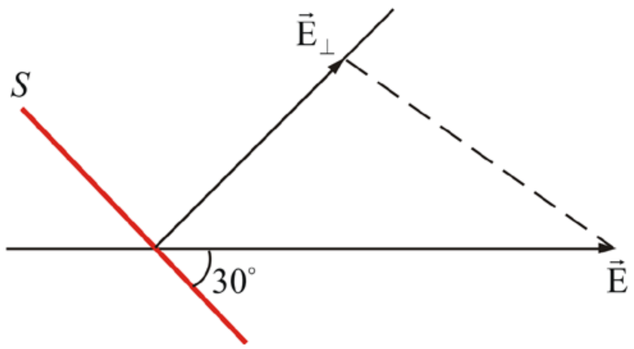


Рисунок 2.4

$$E_\perp = E\sin 30^\circ = 50 \text{ Н/Кл}$$

$$\Phi = E_\perp S = 50 \cdot 3 = 150 \text{ линий.}$$

2.2. Поток вектора напряженности

Итак, на примерах мы показали, что, если силовые линии однородного электрического поля напряженностью $\vec{E}$ пронизывают некоторую площадку S, то *поток вектора напряженности* (число силовых линий через площадку) будет определяться формулой

$$\Phi_E = ES_\perp = ES\cos\alpha = E_n S,$$

где E_n – произведение вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к данной площадке (рисунок 2.5).

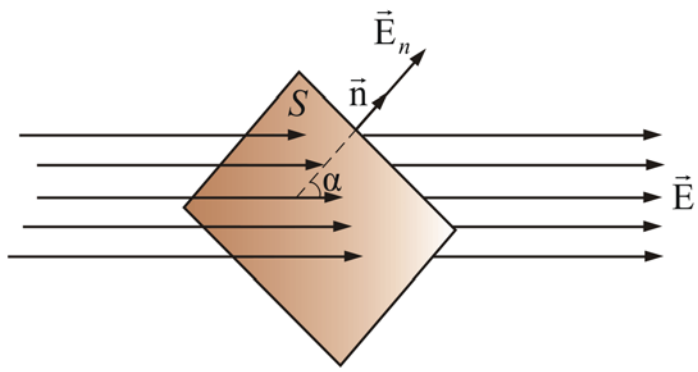


Рисунок 2.5

Полное число силовых линий, проходящих через поверхность S, называется ***потоком вектора напряженности*** *Φ_E через эту поверхность.*

Элементарный поток вектора напряженности через площадку dS (рис. 5) определится соотношением:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha = EdS_0,$$

где $dS_0 = dS\cos\alpha$ – проекция dS на направление нормали $\vec{n}$.

В векторной форме можно записать $d\Phi_E = (\vec{E}\,d\vec{S})$ – скалярное произведение двух векторов, где вектор $d\vec{S} = \vec{n}dS$.

Таким образом, поток вектора $\vec{E}$ есть скаляр, который в зависимости от величины угла α может быть как положительным, так и отрицательным.

Полный поток вектора напряженности через любую площадку S можно определить тогда $\Phi_E = \int\limits_S (\vec{E}d\vec{S})$, а поток через замкнутую поверхность, окружающую заряд или заряженное тело равен $\Phi_E = \oint\limits_S (\vec{E}d\vec{S})$.

Так как напряженность поля, созданного в любой точке пространства зависит от величины заряда, создающего это поле, то поток вектора напряженности электростатического поля через любую площадку, находящуюся в этом поле также зависит от величины заряда.

Рассмотрим примеры, изображенные на рисунках 2.6 и 2.7.

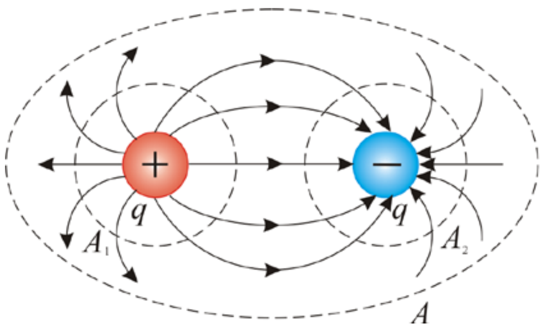


Рисунок 2.6

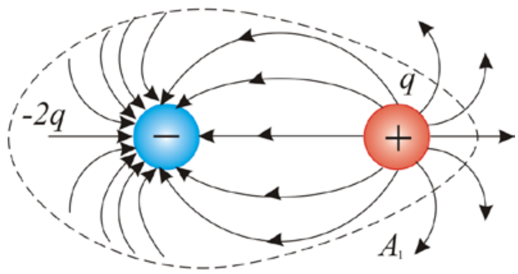


Рисунок 2.7

Для рисунка 2.6 – поверхность A_1 окружает положительный заряд и поток здесь направлен наружу, т.е. $\Phi_E > 0$. Поверхность A_2 – окружает отрицательный заряд, здесь $\Phi_E < 0$ и направлен внутрь. Общий поток через поверхность A равен нулю.

Для рисунка 2.7 – поток будет не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю. Для этой конфигурации поток через поверхность A отрицательный.

Таким образом, поток вектора напряженности зависит от заряда.

2.3. Теорема Остроградского – Гаусса (теорема Гаусса)

К.Ф. Гаусс (1777–1855) выдающийся немецкий математик, астроном и физик в 1839г. предложил теорему, которая устанавливает связь потока вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность со значением заряда q, находящегося внутри этой поверхности. *Эта теорема выведена математически для векторного поля любой природы русским математиком М.В. Остроградским (1801-1862), а затем независимо от него применительно к электростатическому полю – К.Гауссом.*

Теорема Остроградского – Гаусса (теорема Гаусса): поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0:

$$\Phi_E = \oint\limits_s (\vec{E}d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \; .$$

Докажем эту теорему. Пусть поле создается точечным зарядом q. Окружим заряд замкнутой поверхностью S произвольной формы. Разобьем замкнутую поверхность на элементарные площадки dS , к каждой из которых проведем вектор нормали $\vec{n}$.

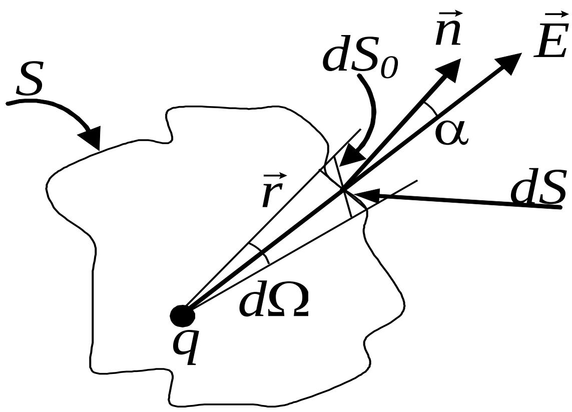


Рис. 2.8

Элементарный поток вектора напряженности через площадку dS (рис. 2.8) определится соотношением:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha = EdS_0,$$

где $dS_0 = dS\cos\alpha$ –проекция dS на направление нормали $\vec{n}$. Тогда $d\Phi_E = EdS_0 = \dfrac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}dS_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega$, где $\dfrac{dS_0}{r^2} = d\Omega$ - элементарный телесный угол, под которым элемент dS виден из места положения заряда. Вычислим поток вектора напряженности через замкнутую поверхность S от точечного заряда q, находящегося внутри этой поверхности.

$$\Phi_E = \oint_S d\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega,$$

так как $\oint d\Omega = 4\pi$, то

$$\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

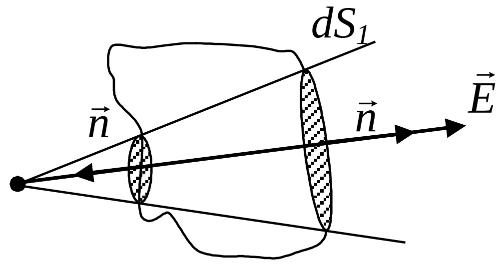


Рис. 2.9

Как видно, поток вектора напряженности выходящий из поверхности не зависит от формы поверхности, охватывающей заряд и пропорционален величине заряда.

Если заряд находится вне замкнутой поверхности, то суммарный поток через любые элементарные площадки dS_1 и dS_2, находящиеся внутри телесного угла $d\Omega$ (рис. 2.9) равен сумме потоков напряженности выходящего из этой поверхности (положительный поток) и входящего в нее (отрицательный поток).

Тогда $d\Phi_E = d\Phi_{dS_1} - d\Phi_{dS_2} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}d\Omega = 0$, следовательно, поток напряженности электрического поля через любую поверхность S, не охватывающую заряды равен нулю, т.е. Φ_E=0.

Пусть внутри замкнутой поверхности имеется зарядов, тогда алгебраическим суммированием (согласно принципу суперпозиции) находим, что общий поток вектора напряженности через замкнутую поверхность равен $\Phi_E = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N} q_i$.

Теорема доказана.

Таким образом теорему Гаусса можно сформулировать следующим образом: <u>поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0:</u>

$$\Phi_E = \oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i \qquad (1),$$

Если заряд распределен внутри замкнутой поверхности непрерывно с объемной плотностью ρ, то теорема Гаусса имеет вид:

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_v \rho dV \qquad (2)$$

где интеграл справа берется по объему V, охватываемому поверхностью *S*.

Необходимо обратить внимание на следующее обстоятельство: в то время как само поле $\vec{E}$ зависит от конфигурации всех зарядов, поток Φ_E сквозь произвольную замкнутую поверхность определяется только алгебраической суммой зарядов внутри поверхности *S*. Это значит, что *если передвинуть заряды внутри замкнутой поверхности*, то $\vec{E}$ *изменится всюду*, и на поверхности *S*, а *поток вектора* $\vec{E}$ *через эту поверхность останется прежним*.

Таким образом, чтобы рассчитать поле, созданное какой-то конфигурацией зарядов в данной точке, нужно через эту точку провести замкнутую поверхность произвольной формы и рассчитать поток вектора напряженности через эту поверхность. Так как по теореме Гаусса поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0***, то, зная величину заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности можно найти напряженность поля в интересующей нас точке пространства.***

Рассмотрим примеры применения теоремы Гаусса.

2.4. Применение теоремы Гаусса к расчету электрических полей

Использование теоремы Гаусса для расчета полей эффективно в тех случаях, когда поле обладает специальной симметрией (чаще всего плоской, цилиндрической или сферической). Симметрия и конфигурация поля должны быть такими, чтобы, во-первых, заряженное тело можно было бы окружить достаточно простой замкнутой поверхностью и, во-вторых, вычисление потока вектора напряженности свести к простому умножению E (или E_n) на площадь поверхности S или часть ее. Если этого сделать нельзя, то задачу необходимо решать другими методами.

1) Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

Будем считать заряд положительным. Плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью $\sigma = \dfrac{dq}{dS}$. Из симметрии вытекает, что напряженность в любой точке поля имеет направление, перпендикулярное к плоскости (рис. 2.10). Очевидно, что в симметричных относительно плоскости точках напряженность поля одинакова по величине и противоположна по направлению.

Выделим на заряженной плоскости площадку ΔS. Окружим эту площадку замкнутой поверхностью. В качестве замкнутой поверхности представим цилиндрическую поверхность с образующими, перпендикулярными к плоскости и основаниями величины ΔS, расположенными относительно плоскости симметрично. Применим к этой поверхности теорему Гаусса $\oint\limits_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_i q_i$. Поток через боковую часть поверхности будет отсутствовать, так как E_n в каждой ее точке равна нулю. Для оснований E_n совпадает с E. Следовательно, суммарный поток через поверхность будет равен $2E\Delta S$. Внутри поверхности заключен заряд $\sigma\Delta S$. Согласно теореме Гаусса, должно выполняться условие: $2E\Delta S = \frac{\sigma\Delta S}{\varepsilon_0}$, откуда

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \tag{3}$$

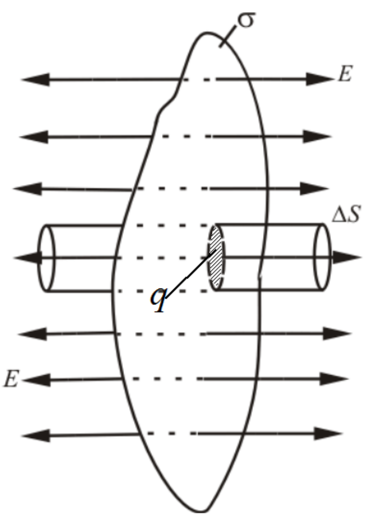


Рис. 2.10

Полученный результат не зависит от длины цилиндра, т.е. на любых расстояниях от плоскости напряженность поля одинакова по величине. Картина линий напряженности выглядит, как показано на рис. 2.11. Для отрицательно заряженной плоскости направления векторов изменятся на обратные. Если плоскость конечных размеров, то полученный результат будет справедлив лишь для точек, расстояние которых от края пластины значительно превышает расстояние от самой пластинки (рис. 2.12).

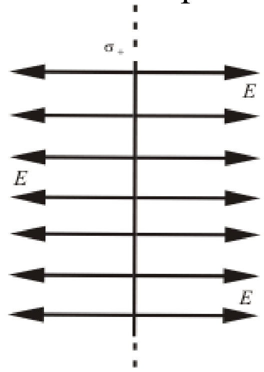


Рис. 2.11

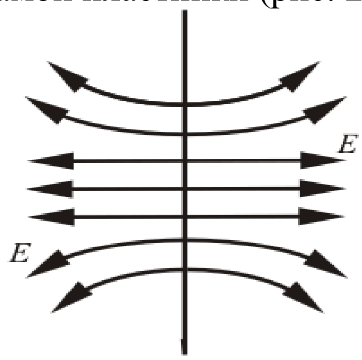


Рис. 2.12

2) <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>

Поле двух параллельных бесконечно больших плоскостей, заряженных разноименно с одинаковой по величине постоянной поверхностной плотностью σ можно рассматривать как суперпозицию полей, создаваемых каждой из плоскостей в отдельности. В области между плоскостями (рис.2.13) складываемые поля имеют одинаковое направление, так что результирующая напряженность равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (4)$$

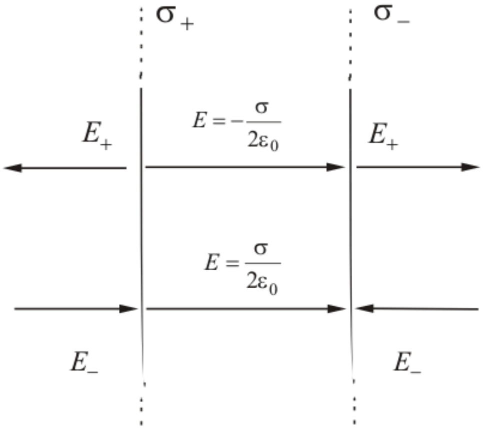


Рис. 2.13

Вне объема, ограниченного плоскостями, складываемые поля имеют противоположные направления, так что результирующая напряженность равна нулю *E=0*. Таким образом, поле сосредоточено между плоскостями. Напряженность поля во всех точках этой области одинакова по величине и по направлению. Поле, обладающее такими свойствами, называется *однородным*. Линии напряженности однородного поля представляют собой совокупность параллельных равноотстоящих прямых.

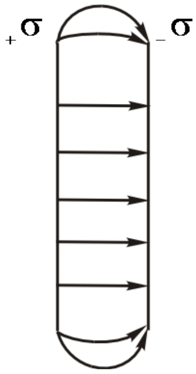
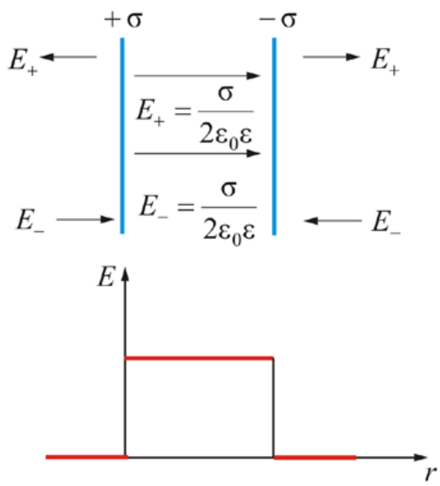


Рис.2.14

Полученный результат приблизительно справедлив и в случае плоскостей конечных размеров, если расстояние между плоскостями значительно меньше их линейных размеров (плоский конденсатор). В этом случае заметные отклонения поля от однородности напряженности наблюдаются только вблизи краев пластин (рис. 2.14).

Пусть две бесконечные плоскости заряжены ными зарядами с одинаковой по величине плотностью σ .



Результирующее поле, как было сказано выше, находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой из плоскостей. Тогда *внутри плоскостей*

$$E = E_+ + E_- \text{ отсюда } E = \sigma / \varepsilon_0$$

Вне плоскостей напряженность поля $E = 0$..

Распределение напряженности электростатического поля между пластинами конденсатора показано на рисунке .

Между пластинами конденсатора действует сила взаимного притяжения (на единицу площади пластин):

$$F_{\text{ед}} = \frac{F}{S} = \frac{S\sigma E}{S}, \quad \text{т.е.} \quad F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}.$$

Механические силы, действующие между заряженными телами, называют **пондермоторными.**

Тогда сила притяжения между пластинами конденсатора:

$$F = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0},$$

где S – площадь обкладок конденсатора. Т.к. $\sigma = \dfrac{q}{S} = E\varepsilon_0$, то

$$F = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 E^2 S}{2}.$$

Это формула для расчета пондермоторной силы.

3) Поле, образованное бесконечно длинным заряженным цилиндром

Рассчитаем напряженность поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром радиуса R, заряженным с поверхностной плотностью σ в точке A, отстоящей на расстояния r от оси цилиндра. Из соображений симметрии следует, что напряженность в любой точке направлена вдоль радиальной прямой, перпендикулярной к оси цилиндра, а значение напряженности зависит лишь от расстояния r от цилиндра.

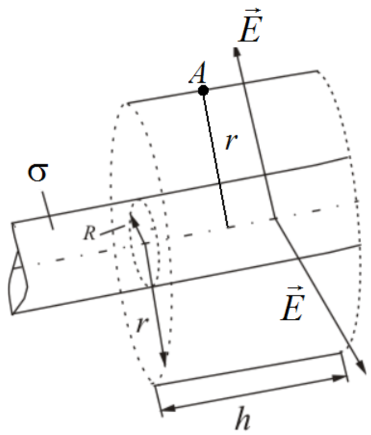


Рис. 2.15

Вырежем из бесконечно длинного цилиндра элемент длиной h. Окружим этот элемент цилиндрической поверхностью (коаксиальной с заряженной) радиуса r, так, чтобы эта поверхность проходила через точку A (рис. 2.15). Для оснований внешнего цилиндра $E_n = 0$, для боковой поверхности (заряд считаем положительным) $E_n = E(r)$. Силовые линии поля пересекают только боковую поверхность цилиндра радиуса r. Следовательно, поток вектора $\vec{E}$ через эту замкнутую поверхность будет равен $E(r)2\pi rh$. Если $r > R$ внутрь поверхности попадает заряд $q = \sigma 2\pi Rh$, где σ–поверхностная плотность заряда. Применяя теорему Гаусса, получаем:

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i, \quad E2\pi rh = \frac{\sigma 2\pi Rh}{\varepsilon_0}, \text{ откуда } E = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}. \qquad (5)$$

Если $r < R$, рассматриваемая замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, вследствие чего $E = 0$. Таким образом, внутри заряженной цилиндрической поверхности поле отсутствует.

Если радиус цилиндра $R << r$, а заряд распределяется по длине цилиндра с линейной плотностью τ. Тогда можно формулу (17) преобразовать:

$$\begin{cases} q = \sigma 2\pi R h \\ q = \tau h \end{cases} \qquad \tau = \sigma 2\pi R \qquad \sigma = \frac{\tau}{2\pi R}$$

Тогда $$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (6)$$

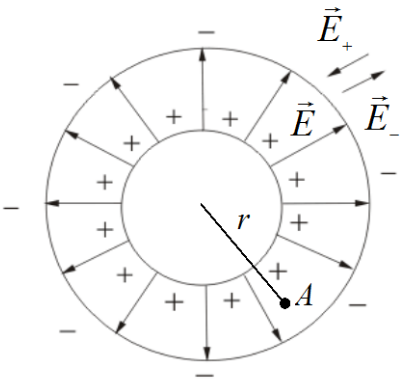


Рис. 2.16

4) <u>Поле, образованное двумя цилиндрическими поверхностями, заряженными одинаковыми разноименными зарядами</u>

С помощью принципа суперпозиции легко найти поле двух коаксиальных цилиндрических поверхностей, заряженных с одинаковой по величине, но отличающейся знаком линейной плотностью τ (рис. 2.16). Внутри меньшего и вне большого цилиндров поле отсутствует. В зазоре между цилиндрами величина напряженности поля определяется формулой

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r} \qquad (7).$$

Это справедливо и для цилиндрических поверхностей конечной длины, если зазор между поверхностями значительно меньше их длины (цилиндрический конденсатор).

5) <u>Поле, образованное заряженной сферической поверхностью</u>

Рассмотрим поле, создаваемое сферической поверхностью радиуса *R*, заряженной с постоянной поверхностной плотностью σ. Это поле обладает центральной симметрией. Это означает, что направление вектора $\vec{E}$ в любой точке проходит через центр сферы, а значение напряженности является функцией расстояния *r* от центра сферы (рис. 2.17). Найдем напряженность поля, созданную заряженной сферой в точках A и B. Через точки A и B проведем сферические поверхности и найдем поток вектора напряженности через эти поверхности.

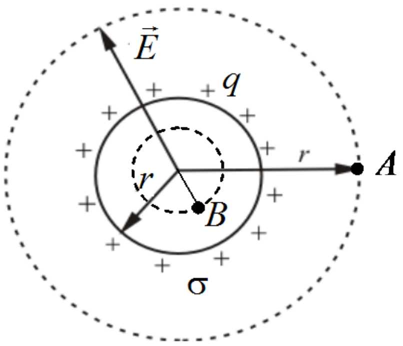


Рис. 2.17

Точка *B* находится внутри заряженной сферической поверхности, на расстоянии *r* от центра (*r*<*R*). Сферическая поверхность, проведенная через эту точку, не будет содержать внутри заряда. Следовательно, по теореме Гаусса $\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$, напряженность в точке *B* будет равна нулю. *E*=0 (*r*<*R*) (рис. 2.17).

Найдем напряженность поля, созданного заряженной сферической поверхностью в точке *A*, находящейся на расстоянии *r* от центра сферы. Окружим заряженное тело замкнутой сферической поверхностью, радиуса *r*, проходящей через точку *A* (рис. 2.17).

Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r)$. Внутрь поверхности попадает весь заряд q, создающий рассматриваемое поле. Следовательно, $E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (так как $\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$).

Таким образом, напряженность поля в точках, расположенных на расстоянии $r>R$, равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \tag{8}$$

Поле вне заряженной сферической поверхности имеет такой же вид, как поле точечного заряда q, находящегося на расстоянии r от точки A. Если известна поверхностная плотность заряда σ, то $q = \sigma 4\pi R^2$, подставив в (8), получим

$$E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}. \tag{9}$$

6). <u>Поле объемного заряженного шара</u>

Найдем напряженность поля, созданного заряженным шаром в точке A, находящейся на расстоянии r от центра шара. Окружим заряженное тело замкнутой сферической поверхностью, радиуса r, проходящей через точку A (рис. 2.18).

Для всех точек этой поверхности $E_n = E(r)$. Внутрь поверхности попадает весь заряд q, создающий рассматриваемое поле. Следовательно, $E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$ (так как $\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$). Таким образом, для поля ***вне шара*** радиусом R (рисунок 2.18) получается тот же результат, что и для сферы, т.е. справедлива формула:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

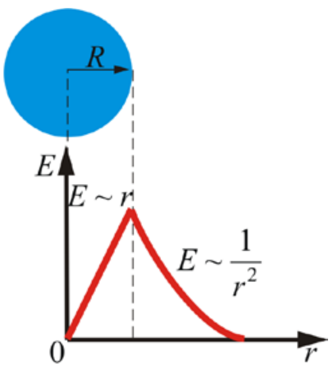


Рисунок 2.18

Точка B находится внутри заряженной сферической поверхности, на расстоянии r от центра ($r<R$). Сферическая поверхность, проведенная через эту точку содержать в себе заряд, равный

$$q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

где ρ – объемная плотность заряда, равная $\rho = \dfrac{q}{V}$; $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ – объем шара. Тогда по теореме Остроградского-Гаусса $\oint\limits_s E_n dS = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum\limits_i q_i$ запишем:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3,$$

т.е. ***внутри шара***

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}. \qquad (10)$$

Таким образом, внутри шара напряженность поля пропорциональна расстоянию от центра $E \sim r$.

2.5. Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

С помощью дифференциальной формы теоремы можно рассчитать электростатическое поле при произвольном пространственном распределении зарядов. В ней установлена связь между объемной плотностью заряда ρ и изменением $\vec{E}$ в окрестности данной точки пространства.

Воспользуемся теоремой Остроградского-Гаусса, согласно которой поток вектора $\vec{A}$ через любую замкнутую поверхность равен интегралу от его дивергенции по объему, охватываемому этой поверхностью, т.е. $\oint\limits_S A_n dS = \int\limits_V div\vec{A}dV$. *Дивергенцией вектора* $\vec{A}$ *(обозначается* $\mathrm{div}\vec{A}$*) в какой либо точке поля называется, предел отношения потока вектора* $\vec{A}$ *через замкнутую поверхность S, охватывающую точку M, к объему ΔV части поля, ограниченной поверхностью S, при неограниченном уменьшении ΔV:* $\mathrm{div}\vec{A} = \lim\limits_{\Delta V \to 0}\dfrac{1}{\Delta V}\oint(\vec{A}d\vec{S})$.

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $<\rho>$. Тогда по теореме Остроградского – Гаусса

$$\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{q}{\varepsilon_0}; \quad \text{или} \quad \oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{<\rho>\Delta V}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{1}{\Delta V}\oint(\vec{E}d\vec{S}) = \frac{<\rho>}{\varepsilon_0}.$$

Теперь устремим $\Delta V \to 0$, стягивая его к интересующей нас точке. Очевидно, что при этом $<\rho>$ будет стремиться к ρ в данной точке, т.е.

$$\frac{<\rho>}{\varepsilon_0} \to \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Величину, являющуюся пределом отношения $\oint(\vec{E}d\vec{S})$ *к* ΔV*, при* $\Delta V \to 0$*, называют* ***дивергенцией вектора*** $\vec{E}$ *и обозначается* $\mathrm{div}\vec{E}$. Тогда, по определению

$$\mathrm{div}\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint(\vec{E}d\vec{S}). \qquad (11)$$

Аналогично определяется дивергенция любого другого векторного поля. Из этого определения следует, что *дивергенция* является *скалярной функцией координат*. В декартовой системе координат

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \qquad (12)$$

Итак,

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (13)$$

Это теорема Остроградского-Гаусса в дифференциальной форме.

Это уравнение свидетельствует о том, что источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.

Написание многих формул упрощается, если ввести векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ (Набла)

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}, \qquad (14)$$

где ***i, j, k*** – орты осей (единичные векторы).

Сам по себе оператор $\vec{\nabla}$ смысла не имеет. Он приобретает смысл в сочетании с векторной или скалярной функцией, на которую символично умножается:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \nabla_x E_x + \nabla_y E_y + \nabla_z E_z = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z},$$

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \qquad (15)$$

Формула (2.4.5) *это тоже* ***дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса.***

В тех точках поля, где $\operatorname{div} E > 0$ – (положительные заряды) ***источники*** поля, где $\operatorname{div} E < 0$ – ***стоки*** (отрицательные заряды). ***Линии*** $\vec{E}$ ***выходят из источников и заканчиваются в стоках.***

Контрольные вопросы

1. В чем заключается смысл теоремы Остроградского –Гаусса? Докажите теорему.
2. Как можно при помощи теоремы Остроградского –Гаусса рассчитать напряженность поля плоскости?
3. Как можно при помощи теоремы Остроградского –Гаусса рассчитать напряженность поля цилиндра или нити?
4. Как можно при помощи теоремы Остроградского –Гаусса рассчитать напряженность поля шара или сферы?
5. Как записать теорему Остроградского –Гаусса в дифференциальной форме?
6. Каков смысл дивергенции вектора?