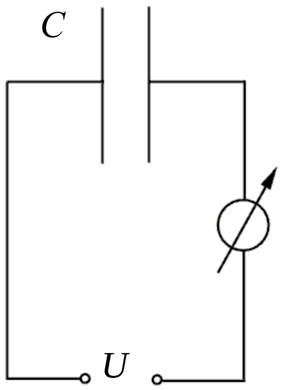
ТЕМА 16. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

16.1. Ток смещения.

Из явления электромагнитной индукции следует, что всякое переменное магнитное поле вызывает вихревое электрическое поле. Анализируя различные электромагнитные процессы, Максвелл пришел к заключению, что должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля вызывает появление вихревого магнитного поля. Это утверждение выражает свойство электромагнитного поля (второе основное положение теории Максвелла).

Так как магнитное поле есть основной обязательный признак всякого тока, то Максвелл назвал переменное электрическое поле током смещения, в отличие от тока проводимости, обусловленного движением заряженных частиц (электронов и ионов).



Рассмотрим электрическую цепь, содержащую конденсатор. Движение свободных носителей заряда, т.е., ток проводимости, имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Следовательно, линии тока проводимости терпят на границах обкладок разрыв. Через такой разомкнутый контур постоянный ток не проходит. Лишь в первые моменты, когда конденсатор будет заряжаться, возникнет кратковременный зарядный ток. Если после окончания зарядки переключить источник (т.е., изменить направление тока), то конденсатор перезарядится и в процессе перезарядки в проводе опять появится ток, но теперь обратного направления. При каждом переключении источника питания в проводе будет возникать кратковременный ток.

Если цепь подключить к источнику переменного тока, то в пространстве между обкладками будет переменное электрическое поле, которое можно охарактеризовать вектором электрического смещения $\vec{D}$. Максвелл предположил, что линии тока проводимости непрерывно переходят на границе обкладок в линии тока смещения. (Мы знаем, что в отличие от постоянного тока, переменные токи могут существовать и в разомкнутых контурах).

Мгновенное значение силы тока $I = \dfrac{dq}{dt}$. Плотность тока проводимости в непосредственной близости от поверхности обкладок определяется выражением:

$$j_{ïð} = \frac{d}{dt}\left(\frac{q}{S}\right) = \frac{d\sigma}{dt}, \tag{1}$$

где S – площадь обкладки,

q – распределенный на ней заряд,

σ – поверхностная плотность заряда.

Чтобы линии тока смешения имели такую же частоту, как и линии тока проводимости, плотность тока смещения $j_{ñì}$ также должна быть равна $\dfrac{d\sigma}{dt}$. Выразим $j_{ñì}$ через параметры электрического поля, имеющегося в зазоре. Электрическое смещение в зазоре между обкладками равно:

$$D = \varepsilon_0 E_0 = \sigma, \text{ так как } E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Откуда

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt}$$

и тогда

$$j_{ñì} = \frac{dD}{dt}. \tag{2}$$

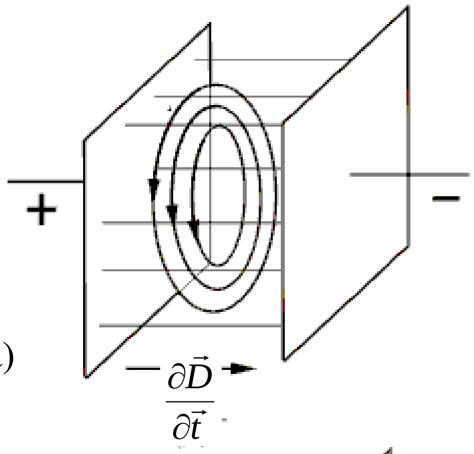
Из сопоставления (299) и (300) видим, что сила тока в проводе $I = \dfrac{dq}{dt} = S\dfrac{dD}{dt}$, т.е., она однозначно связана с быстротой изменения электрического смещения электрического поля.

Отсюда следует, что меняющееся поле конденсатора вызывает так же магнитное поле, как ток, имеющий силу $S\dfrac{dD}{dt}$ или плотность $\vec{j}_{ñì} = \dfrac{d\vec{D}}{dt}$.

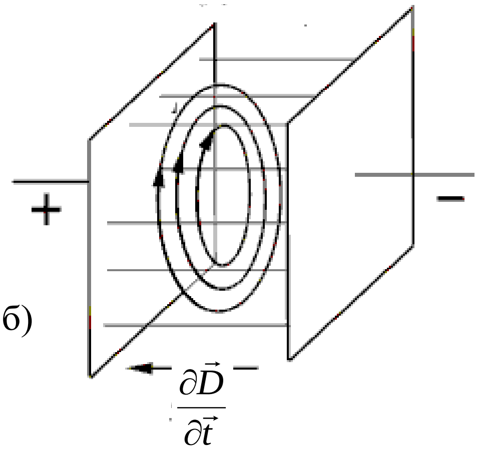
Эта величина получила название плотности тока смещения. Пользуясь этим понятием, можно выразить второе положение Максвелла в следующем: переменное во времени электрическое поле вызывает такое же магнитное поле, как и ток проводимости с плотностью $\vec{j}_{ñì}$, определяемой формулой (300).

В общем случае электрическое поле может быть неоднородным и может зависеть не только от времени, но и от координат. В этом случае выражение для плотности тока смещения будет:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{dt}, \qquad (3)$$



а)



б)

где знак частной производной указывает на то, что магнитное поле зависит от быстроты изменения электрического смещения во времени в каждой точке поля.

Следует подчеркнуть, ток смещения определяется производной вектора $\vec{D}$, но не самим этим вектором. Так, например, в поле плоского конденсатора вектор $\vec{D}$ направлен от положительной пластины к отрицательной. Если электрическое поле увеличивается, то $\frac{d\vec{D}}{dt}$, а следовательно и ток смещения направлены так, как показано на рисунке. Если же электрическое поле убывает, то $\frac{d\vec{D}}{dt}$ направлено от отрицательной пластины к положительной и магнитное поле ($\vec{H}$) противоположно по сравнению с первым случаем.

Если в каком либо проводнике имеется переменный ток, то внутри проводника существует переменное электрическое поле. Поэтому, внутри проводника имеются, и ток проводимости и то смещения и магнитное поле проводника определяется их суммой, т.е., полным током. Плотность полного тока:

$$\vec{j} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (4)$$

В зависимости от электропроводности среды и быстроты изменения поля (частоты переменного тока) оба слагаемых играют разную роль. В хорошо проводящих веществах (металлах) и при низких частотах плотность тока смещения мала и током смещения можно пренебречь по сравнению с током проводимости. В плохо проводящих средах (изоляторах) и при высоких частотах ток смещения играет основную роль. Оба слагаемых в формуле (4) могут иметь и одинаковые знаки и противоположные. Поэтому, полный ток может быть как больше, так и меньше тока проводимости.

Таким образом, в общем случае меняющихся токов магнитное поле определяется не током проводимости, а полным током. Если мы имеем разомкнутый контур, то на концах образовывается лишь ток проводимости.

В диэлектрике же между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости. Поэтому, если под электрическим током понимать полный ток, определяемый формулой (4), то оказывается, что в природе все электрические токи замкнуты. Этот важный вывод тоже был получен Максвеллом.

16.2. Единая теория электрических и магнитных явлений Максвелла. Система уравнений Максвелла

16.2.1. Первое уравнение Максвелла

Первое уравнение Максвелла является обобщением закона электромагнитной индукции $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$. Анализируя явление электромагнитной индукции, Максвелл пришел к его углубленному истолкованию, заключающемуся в том, что всякое изменение магнитного поля возникает появление вихревого электрического поля и, таким образом, пришел к выражению:

$$\oint(\vec{E}d\vec{l}) = -\int(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S}). \tag{5}$$

Здесь использована частная производная по времени $\left(\dfrac{\partial B}{\partial t}\right)$,так как $\vec{B}$, а следовательно и Ф, могут еще зависеть от координат (от положения площадки S). Итак, первое уравнение Максвелла в интегральной форме определяется формулой (5). Максвеллом это уравнение было сформулировано в дифференциальной форме:

$$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}. \tag{6}$$

В (6) использовано одно из понятий векторного анализа $rot\vec{E}$ (ротор вектора $\vec{E}$, сокращение от французского *rotation* – вращение или от английского *curl* – вихрь). Оно характеризует поле вектора $\vec{E}$ в некоторой точке пространства.

Вообще, для какого – либо вектора $\vec{A}$ поле этого вектора в некоторой точке пространства P выражается в виде:

$$\left(rot\vec{A}\right)_n = \lim_{S\to P}\frac{\text{циркуляция}\vec{A}\text{ по контуру}\Gamma}{S}. \tag{7}$$

Под $(rot\vec{A})_n$ подразумевается проекция вектора $rot\vec{A}$ на положительную нормаль к площадке S, охватываемой контуром Γ. Выражение (305) может служить определением вектора $rot\vec{A}$, т.е. $(rot\vec{A})_n$ представляет отношение циркуляции к площади S, охватываемой контуром, которое стремится к некоторому пределу, используемому в качестве характеристики поля в точке P. Но величина этого предела зависит не только от свойств поля, а также и от ориентации контура в пространстве. Последняя может быть задана направлением положительной нормали n к плоскости контура. $(rot\vec{A})_n$ – проекция вектора $rot\vec{A}$

на положительную нормаль к площадке S охватываемой контуром Γ. Из (305) следует, что ротор есть векторная функция точки P.

Ротор вектора $\vec{A}$ определяется в декартовой системе координат следующим выражением:

$$rot\vec{A} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

Проекции $rot\vec{A}$ на оси координат:

$$\left(rot\vec{A}\right)_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

$$\left(rot\vec{A}\right)_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

$$\left(rot\vec{A}\right)_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Для преобразования интегральной формы первого уравнения Максвелла $\oint(\vec{E}d\vec{l}) = -\int(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S})$ в дифференциальную, применим теорему Стокса, согласно которой $\oint(\vec{E}d\vec{l}) = \int(rot\vec{E}d\vec{S})$, откуда $\int(rot\vec{E}d\vec{S}) = -\int(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S})$ и $rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ – первое уравнения Максвелла в дифференциальной форме.

Напишем первое уравнение Максвелла в скалярном виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}\\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}\\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\end{aligned}\right\}$$

16.2.2. Третье уравнение Максвелла

Третье уравнение Максвелла является обобщением, так называемого, закона полного тока, который выражается в том, что циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру в вакууме равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, т.е., $\oint(\vec{H}d\vec{l}) = \sum I_k = I$,где I – ток проводимости, $I = \int(\vec{j}d\vec{S})$, и тогда $\oint(\vec{H}d\vec{l}) = \int(\vec{j}d\vec{S})$.

Максвелл дал обобщенную формулировку закона полного тока, введя понятие тока смещения $\vec{j}_{см} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. Следует отметить, что ток проводимости и ток смещения в вакууме имеют различную физическую сущность. Ток проводимости–это упорядоченное движение свободных электрических зарядов. Ток смещения в вакууме – это изменение электрического поля во времени и не сопровождается каким–либо движением электрических зарядов. В вакууме $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ и $\vec{j}_{см} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Ток смещения не сопровождается выделением тепла. С учетом тока смещения $\oint\limits_{Г} (\vec{H} d\vec{l}) = I + I_{см}$, где $I_{см} = \int\limits_{S} (\vec{j}_{см} d\vec{S}) = \int (\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S})$, тогда:

$$\oint (\vec{H} d\vec{l}) = \int (\vec{j} d\vec{S}) + \int (\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}). \qquad (8)$$

– третье уравнение Максвелла в интегральной форме.

Максвеллом этот закон был сформулирован в дифференциальной форме. Для перехода к дифференциальной форме воспользуемся теоремой Стокса. Заменяя циркуляцию вектора $\vec{H}$ интегралом от $rot\,\vec{H}$ по поверхности $\left(\oint (\vec{H} d\vec{l}) = \int\limits_{S} (rot\vec{H} d\vec{S}) \right)$, получаем:

$$\int\limits_{S} (rot\vec{H} d\vec{S}) = \int \left((\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S} \right).$$

Так как S – произвольная поверхность, то равенство возможно только в том случае, если:

$$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (9)$$

– третье уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Напишем третье уравнение Максвелла в скалярном виде:

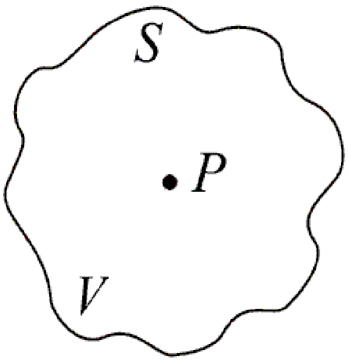
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= j_x + \frac{\partial D_x}{\partial t} \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j_y + \frac{\partial D_y}{\partial t} \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j_z + \frac{\partial D_z}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

16.2.3. Четвертое уравнение Максвелла

Четвертое уравнение Максвелла в интегральной форме записывается в следующем виде:

$$\oint (\vec{D} d\vec{S}) = \sum q_i \text{ или } \oint (\vec{D} d\vec{S}) = \int\limits_{V} \rho dV. \qquad (11)$$

Если внутри замкнутой поверхности нет зарядов, то поток вектора $\vec{D}$ через по-



верхность S равен 0. Частное от деление $\frac{\Phi}{V}$, где Φ – поток вектора $\vec{D}$, V –объём, охватываемый замкнутой поверхностью, –даёт среднюю удельную мощность источников поля, заключённых в объёме V. В пределе при $V \to 0$ получаем истинную удельную мощность источников поля в точке P, которую называют дивергенцией (или расхождением) вектора.

$$div\vec{A} = \lim_{V \to P} \frac{\Phi_A}{V} = \lim_{V \to P} \oint_S (\vec{A}d\vec{S}) .$$

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .$$

М.В. Остроградский – русский математик и механик, занимавшийся математическим анализом, математической физикой и теоретической механикой, в 1828г. доказал теорему о преобразовании интегралов и создал теорему Остроградского–Гаусса в электростатике.

Зная дивергенцию вектора $\vec{A}$ в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через любую поверхность конечных размеров. Для этого нужно разбить объём, ограниченный поверхностью S на большое число малых объёмов. Согласно теореме Стокса поток вектора $\vec{A}$, вытекающий из любого из этих малых объёмов, может быть записан в виде:

$$d\Phi_A = div\vec{A}\Delta V .$$

Если просуммировать это выражение по всем объёмам, ограниченным поверхностью S, то придем к соотношению:

$$\Phi_A = \oint \vec{A}d\vec{S} = \int_V div\vec{A}dV$$

Это соотношение носит название теорема Остроградского – Гаусса.
Используя теорему Остроградского – Гаусса, получим:
$\oint(\vec{D}d\vec{S}) = \int div\vec{D}dV$,а так как $\oint(\vec{D}d\vec{S}) = \int \rho dV$, то $\int div\vec{D}dV = \int \rho dV$ и поскольку последнее равенство выполняется при любом объёме V, то

$$div\vec{D} = \rho . \qquad (12)$$

Таким образом, используя теорему Остроградского – Гаусса, приходим к четвертому уравнению Максвелла в дифференциальной форме (12). Представим четвёртое уравнение в скалярном виде:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho . \qquad (22)$$

16.2.4. Второе уравнение Максвелла

Второе уравнение Максвелла совпадает с теоремой Гаусса для магнитного поля, т.е.,

$$\oint(\vec{B}d\vec{S}) = 0. \tag{23}$$

Это означает, что не существует линий вектора $\vec{B}$, которые только входят в замкнутую поверхность или только выходят из неё. Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты и входят внутрь поверхности столько же раз, сколько выходят наружу. С помощью теоремы Остроградского – Гаусса (320) запишем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме:

$$\oint(\vec{B}d\vec{S}) = \int div\vec{B}dV = 0, \text{ тогда } div\vec{B} = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) – второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме.

Можно представить второе уравнение в скалярном виде:

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0.$$

16.2.5. Значение теории Максвелла и физический смысл уравнений

Анализ явления электромагнитной индукции и открытие тока смещения позволило Максвеллу создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория явилась завершением важного этапа в развитии учения об электричестве и привела к классическому представлению об электромагнитном поле, содержащем в общем случае и электрическое, и магнитное поля, связанные между собой и способные взаимно превращаться друг в друга. Теория Максвелла не только объяснила уже известные факты, но и предсказала новые и важные явления. Совершенно новым в этой теории явилось предположение Максвелла о магнитном поле токов смещения. На основе этого предположения Максвелл теоретически предсказал существование электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. Теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привело затем Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны. В дальнейшем электромагнитные волны действительно были получены на опыте, а еще позднее электромагнитная теория света, а с нею и вся теория Максвелла получили полное и блестящее подтверждение.

Уравнение Максвелла содержит в себе все основные законы электрического и магнитного полей, включая электромагнитную индукцию, и поэтому являются общими уравнениями электромагнитного поля в покоящихся средах. Поскольку уравнение Максвелла образуют основу теории об электромагнетизме, ещё раз рассмотрим кратко физический смысл этих уравнений. Для удобства составим таблицу:

№ уравнения	Интегральная форма	Дифференциальная. Форма.	Физический смысл уравнения
I	$\oint(\vec{E}d\vec{l}) = -\int(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}d\vec{S})$ Циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру прямо пропорциональна скорости изменения магнитного потока через площадь, ограниченную этим контуром.	$rot\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ При всяком изменении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле, пропорциональное скорости изменения индукции магнитного поля.	Всякое изменение магнитного поля во времени вызывает появление вихревого электрического поля
II	$\oint(\vec{B}d\vec{S}) = 0$ Поток индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю. Это означает, что в природе нет магнитных зарядов.	$div\vec{B} = 0$ Поток силовых линий индукции магнитного поля из бесконечного элементарного объёма равен нулю, так как поле вихревое.	Источники магнитного поля в виде магнитных зарядов в природе отсутствуют.
III	$\oint(\vec{H}d\vec{l}) = \int(\vec{j}d\vec{S}) + \int(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}d\vec{S})$ Циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру прямо пропорциональна суммарному току, пересекающему поверхность, охватываемую этим контуром.	$rot\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ Вокруг любого проводника с током и вокруг любого переменного электрического поля существует вихревое магнитное поле.	Протекание тока проводимости по проводникам и изменения электрического поля во времени приводят к появлению вихревого магнитного поля.
IV	$\oint(\vec{D}d\vec{S}) = \int \rho dV$ Поток вектора электростатической индукции через произвольную замкнутую поверхность, охватывающую заряды, прямо пропорционален суммарному заряду, расположенному внутри этой поверхности.	$div\vec{D} = \rho$ Поток вектора индукции электростатического поля из бесконечного элементарного объема прямо пропорционален суммарному заряду, находящемуся в этом объёме.	Источником электрического поля является электрический заряд.

Система уравнений Максвелла с единой точки зрения объясняет всю картину электромагнитных явлений. Они применяются для расчета полей по заданным распределениям в пространстве токов и зарядов. Эта система уравнений дополняется так называемой системой материальных уравнений, которые характеризуют индивидуальные свойства заполняющей пространство материальной среды:

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}; \quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}; \quad \vec{j}_{np} = \sigma\vec{E}.$$

Из уравнений Максвелла вытекает существование электромагнитных волн, то есть такого электромагнитного поля, которое способно существовать самостоятельно, в отсутствие электрических зарядов и токов.

Значение уравнений Максвелла в создании единой теории электромагнитного поля.

1. Теорией Максвелла называется последовательная теория единого поля ЭМП, создаваемого произвольной системой зарядов и токов. В этой теории решается основная задача электродинамики – по заданному распределению зарядов и токов отыскиваются характеристики электрического и магнитного полей. Эта теория явилась обобщением важнейших законов, описывающих электрические и магнитные явления (аналогично уравнениям Ньютона и началам термодинамики).

2. В теории Максвелла рассматриваются макроскопические поля, которые создаются макрозарядами и макротоками. Расстояния от источников полей до рассматриваемых точек много больше размеров атомов. Периоды изменения переменных электрических и магнитных полей много больше периодов внутренних процессов.

3. Теория Максвелла имеет феноменологический характер. В ней не рассматривается внутренний механизм явлений в среде. Среда описывается с помощью трёх величин ε, μ и σ.

4. Теория Максвелла является теорией близкодействия, согласно которой электрические и магнитные взаимодействия, происходящие в электрических и магнитных полях и распространяются с конечной скоростью, равной скорости света в данной среде.