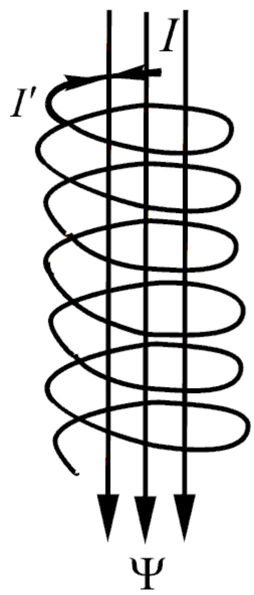
ТЕМА 14.. САМОИНДУКЦИЯ И ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

14.1. Явление самоиндукции



Электрический ток, текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток Ψ. При изменениях I изменяется также и Ψ, вследствие чего в контуре индуцируется ЭДС (т.е., появляется ток I', направленный противоположно току I, согласно правилу Ленца). Это явление называется явление самоиндукции.

В соответствии с законом Био–Савара–Лапласа магнитная индукция B пропорциональна силе тока, вызвавшего поле, отсюда вытекает, что ток I в контуре и создаваемый им магнитный поток Ψ через контур пропорциональны друг другу:

$$\Psi = LI. \qquad (1)$$

Коэффициент пропорциональности L между силой тока и полным магнитным потоком называется индуктивностью контура. Индуктивность контура равна полному магнитному потоку через этот контур при силе тока в контуре равной единице. Отсюда следует и определение единицы индуктивности. За единицу индуктивности в СИ принимается индуктивность такого проводника, у которого при силе тока в нем 1А возникает сцепленный с ним полный магнитный поток Ψ, равный 1Вб. Эту единицу называют генри [1](Г) (1**Г**=1Вб/1А).

Линейная зависимость Ψ от I наблюдается только в том случае, если магнитная проницаемость μ среды, которой окружен контур, не зависит от напряженности поля H, т.е., в отсутствие ферромагнетиков. В противном случае μ является сложной функцией от I (через H) и, поскольку $B = \mu\mu_0 H$, зависимость Ψ от I также будет довольно сложной. Однако, соотношение (1) распространяют и на этот случай, считая индуктивность функцией от I. При неизменной силе тока I полный поток Ψ может изменяться за счет изменения формы и размеров контура. Отсюда следует, что индуктивность L зависит от геометрии контура (т.е., от его формы и размеров), а также от магнитных свойств (от μ)

---

[1] Дж. Генри (1797 – 1878) – американский физик, обнаруживший в 1832 г. явление самоиндукции.

окружающей контур среды. Если контур жесткий и поблизости о него нет ферромагнетиков, индуктивность L является постоянной величиной.

При протекании тока I по бесконечно длинному соленоиду внутри него возбуждается однородное магнитное поле, индукция которого равна $B = \mu\mu_0 nI$. Поток через каждый из витков равен $\Phi = BS$, а полный поток, сцепленный с соленоидом:

$$\Psi = N\Phi = nlBS = \mu\mu_0 n^2 lSI, \tag{2}$$

где l – длина соленоида (которая предполагается очень большой),

S – площадь поперечного сечения,

n – число витков на единицу длины (произведение nl дает полное число витков N).

Из (1) и (2) получаем для индуктивности длинного соленоида выражение:

$$L = \mu_0\mu n^2 lS = \mu_0\mu n^2 V, \tag{3}$$

где $V = lS$ – объем соленоида.

Из (3) следует, размерность μ_0 равна размерности индуктивности, деленной на размерность длины, т.е., $|\mu_0| = \left|\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\right|$.

При изменениях силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции ε_s, равная:

$$\varepsilon_s = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right). \tag{4}$$

Если при изменениях силы тока индуктивность остается постоянной (что возможно лишь при отсутствии ферромагнетиков), выражение для ЭДС самоиндукции имеет вид:

$$\varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt}. \tag{5}$$

Знак “минус” в этой формуле обусловлен правилом Ленца, т.к. в рассматриваемом случае причиной, вызывающей ε_s, является изменение силы тока в цепи.

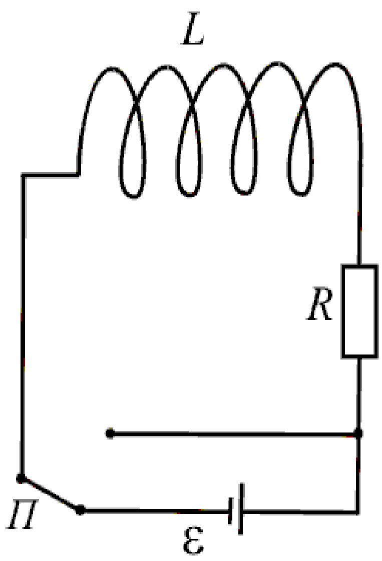
Выражение (5) справедливо лишь, когда $L = const$. В присутствии ферромагнетиков L недеформируемого контура будет функцией от I (через H). Тогда, записывая $\frac{dL}{dt}$ как $\frac{dL}{dI}\frac{dI}{dt}$ и подставляя это в (4), получим:

$$\varepsilon_s = -\left(L + I\frac{dL}{dI}\right)\frac{dI}{dt}. \tag{6}$$

При $L = const$ изменение силы тока со скоростью 1А/с в проводнике с $L = 1$гн приводит согласно (5) к возникновению $\varepsilon_s = 1$В.

14.2. Влияние самоиндукции на ток при замыкании и размыкании цепи, содержащей индуктивность

По правилу Ленца дополнительные токи, возникающие вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы противодействовать изменениям тока в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи происходит не мгновенно, а постепенно.



1) <u>Изменение тока при размыкании цепи.</u>

Считаем, что $L = const$. В цепи будет течь постоянный ток:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{R}. \qquad (7)$$

Сопротивление источника тока считаем пренебрежимо малым. В момент времени $t = 0$ отключим источник тока, замкнув одновременно цепь накоротко переключателем П. Как только сила тока в цепи начнет убывать, возникает ЭДС самоиндукции, противодействующая этому убытию. Сила тока в цепи будет удовлетворять уравнению:

$$IR = \varepsilon_s = -L\frac{dI}{dt,} \text{ или } \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0. \qquad (8)$$

Уравнение (8) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Разделив переменные, получим:

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}dt.$$

Отсюда

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + const.$$

Потенцирование этого соотношения дает:

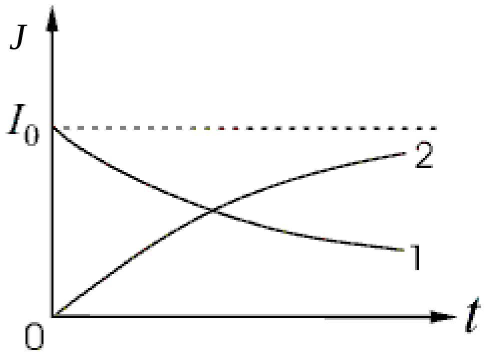
$$I = const^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (9)$$

Выражение (9) является общим решением уравнения (8). При $t = 0$ сила тока $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$. Следовательно, $const = I_0$. После подстановки в (9) придем к выражению:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \qquad (10)$$

Итак, после отключения источника ЭДС сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону (10). График убывания изображен на рисунке кривая 1. Скорость убывания определяется величиной:

$$\tau = \frac{L}{R}, \qquad (11)$$



которую называют постоянной времени (она имеет размерность времени), т.е.,

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \qquad (12)$$

В соответствии с этой формулой τ – время, в течении которого сила тока уменьшается в e раз. Из (11) видно, что чем больше индуктивность цепи L и меньше ее сопротивление R, тем больше постоянная времени τ и тем медленнее спадает ток в цепи.

Для упрощения расчетов мы считаем, что цепь в момент отключения источника тока замыкается накоротко. Если просто разорвать цепь с большой индуктивностью, возникающее высокое индуцированное напряжение создает искру или дугу в месте разрыва.

2) <u>Установление тока при замыкании цепи</u>

После подключения источника ЭДС, до тех пор, пока сила тока не достигнет установившегося значения (7), в цепи кроме ЭДС ε будет действовать ЭДС самоиндукции. Следовательно, в соответствии с законом Ома:

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_s = \varepsilon - L\frac{dI}{dt}, \text{ или } \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{\varepsilon}{L}. \qquad (13)$$

(13) – неоднородное дифференциальное уравнение.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой общее решение соответствующего однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения. Общее решение уравнения (13) $I = \frac{\varepsilon}{R} = I_0$. Следовательно, общим решением уравнения (13) будет:

$$I = I_0 + const \cdot e^{-\frac{R}{L}t}.$$

При $t = 0$, $I = 0$. Отсюда $const = -I_0$ и, таким образом,

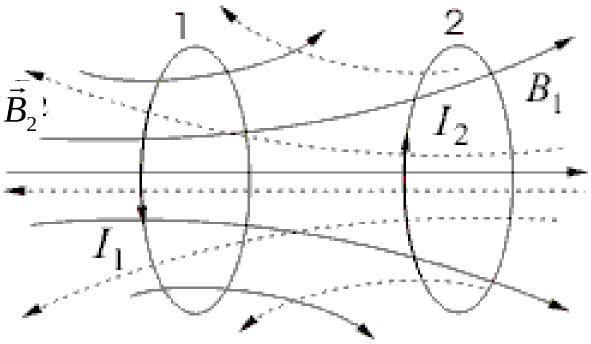
$$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right). \qquad (14)$$

Это выражение описывает нарастание тока в цепи после подключения в ней источника ЭДС. График нарастания тока изображен на рис.106 кривая 2.

14.3. Явление взаимной индукции

Рассмотрим два контура 1 и 2, расположенные близко друг к другу. Если в контуре 1 течет ток силы I_1, он создает через контур 2 пропорциональный I_1 полный магнитный поток:

$$\Psi_2 = L_{21} I_1 \qquad (15)$$



(поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями). При изменениях тока I_1 в контуре 2 индуцируется ЭДС:

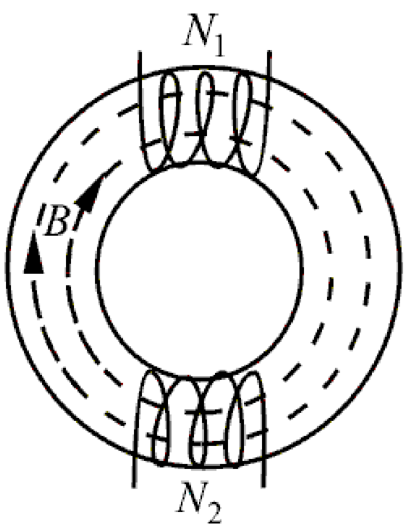
$$\varepsilon_{i2} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} \qquad (16)$$

(предполагаем, что ферромагнетиков вблизи контура нет).

Аналогично, при протекании в контуре 2 тока силы I_2 возникает сцепленный с контуром 1 поток:

$$\Psi_1 = L_{12} I_2 \qquad (17)$$

(поле, создающее этот поток, изображено пунктирными линиями).



При изменениях тока I_2 в контуре 1 индуцируется ЭДС:

$$\varepsilon_{i1} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}. \qquad (18)$$

Контуры 1 и 2 называются связанными, а явление возникновения ЭДС в одном из контуров при изменениях силы тока в другом называется явлением взаимной индукции. Коэффициенты пропорциональности L_{12} и L_{21} называются взаимной индуктивностью контуров. Соответствующий расчет дает, что в отсутствие ферромагнетиков эти коэффициенты всегда равны друг другу:

$$L_{12} = L_{21}. \qquad (19)$$

Их величина зависит от формы, размеров и взаимного расположения контуров, а также от магнитной проницаемости окружающей контуры среды. Измеряется L_{12} в тех же единицах, что и индуктивность L.

Найдем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на общий тороидальный железный сердечник. Линии магнитной индукции сосредотачиваются внутри сердечника, поэтому можно считать, что возбуждаемое любой из обмоток магнитное поле будет иметь всюду в сердечнике одинаковую напряженность. Если первая обмотка имеет N_1 витков и по ней течет ток силы I_1, то согласно теореме о циркуляции:

$$Hl = N_1 I_1, \qquad (20)$$

где l – длина сердечника.

Магнитный поток через поперечное сечение сердечника $\Phi = BS = \mu_0 \mu HS$, где S –площадь поперечного сечения сердечника. Подставив значение H из (20) и умножив получившееся выражение на N_2, получим полный поток, сцепленный со второй обмоткой:

$$\Psi_2 = \frac{S}{l}\mu_0\mu N_1 N_2 l_1.$$

Сопоставление этого выражения с формулой (267) $\left[\Psi_2 = L_{21} I_1\right]$ дает:

$$L_{21} = \frac{S}{l}\mu_0\mu N_1 N_2. \tag{21}$$

Вычисления потока Ψ_1, сцепленного с первой обмоткой, в том случае, когда по второй обмотке течет ток силы I_2, приводит к выражению:

$$L_{12} = \frac{S}{l}\mu_0\mu N_1 N_2, \tag{22}$$

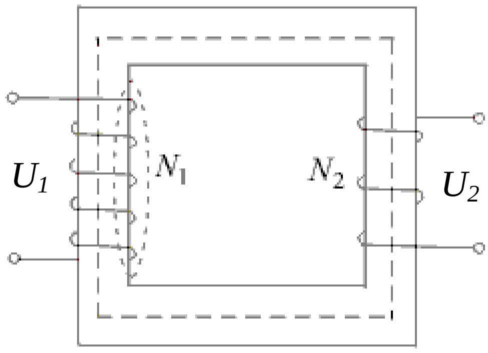
по форме совпадающему с L_{21} (273). Однако, в данном случае нельзя утверждать, что $L_{12} = L_{21}$. Множитель μ, входящий в выражения для этих коэффициентов, зависит от напряженности поля H в сердечнике. Если $N_1 \neq N_2$ один и тот же ток, пропускаемый один раз по первой, а другой раз по второй обмотке, создает в сердечнике поле различной напряженности H. Соответственно значения μ в обоих случаях будут различными, так что при $I_1 = I_2$ числовые значения L_{12} и L_{21} не совпадают.

14.4. Трансформатор

Примером взаимной индукции является действие трансформатора, который служит для повышения или понижения напряжения переменного тока.

Трансформатор был изобретен в 1876г. русским электротехником, изобретателем П.Н. Яблочковым (1847–1894) для раздельного питания отдельных электрических источников света.

Трансформатор представляет собой устройство, предназначенное для преобразования напряжения и силы переменного тока. Он имеет сердечник (обычно замкнутой формы) из мягкого железа или иного магнито–мягкого ферромагнетика, который несет на себе две обмотки – первичную и вторичную. Концы первичной обмотки (вход трансформатора) подключены к сети питающего переменного тока, а концы вторичной обмотки (выход) – к потребителям электрической энергии. ЭДС электромагнитной индукции, возникающая во вторичной обмотке, пропорциональна числу витков в ней, и поэтому, изменяя это число витков, можно изменять в широких пределах напряжение на выходе трансформатора.



Рассмотрим как связаны между собой входное напряжение U_1 и выходное напряжение U_2. В случае технического переменного тока, изменяющегося по закону синуса (косинуса) и намагничивания сердечника, далекого от насыщения, этот магнитный поток будет также изменяться приблизительно по синусоидальному (косинусоидальному) закону: $\Phi = \Phi_0 \sin \omega t$, где ω – угловая (циклическая) частота переменного тока, а Φ_0 – максимальное значение потока (его амплитуда). В реальных трансформаторах часть линий индукции, создаваемой первичной обмоткой, выходит из сердечника и замыкается вне вторичной обмотки (пунктир на рис.109), образуя так называемый поток рассеяния. Однако, в хороших трансформаторах поток рассеяния мал по сравнению с потоком внутри сердечника, и поэтому мы будем считать, что один и тот же поток Φ пронизывает обе обмотки. ЭДС, возникающая в первичной обмотке (ЭДС самоиндукции), равна:

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi}{dt} N_1,$$

а ЭДС во вторичной обмотке:

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi}{dt} N_2,$$

где N_1 и N_2 – число витков в первичной и во вторичной обмотках.

Применяя к обмоткам трансформатора закон Ома для участка с ЭДС ($U = rI - \varepsilon$), находим напряжение на входе трансформатора:

$$U_1 = r_1 I_1 - \varepsilon_1 = r_1 I_1 + \frac{d\Phi}{dt} N_1$$

и напряжение на выходе:

$$U_2 = r_2 I_2 - \varepsilon_2 = r_2 I_2 + \frac{d\Phi}{dt} N_2.$$

Здесь r_1 и r_2 – сопротивления первичной и вторичной обмоток, а I_1 и I_2 – силы тока в них.

Ограничимся случаем разомкнутой вторичной обмотки, т.е., положим I_2=0. Будем считать, что $r_1 I_1 << \varepsilon_1$ (что выполняется для всех технических трансформаторов). Тогда, деля почленно (275) и (276), находим:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Отношение $k = \frac{N_2}{N_1}$ называется коэффициентом трансформации. Он показывает во сколько раз вторичное напряжение больше первичного напряжения в режиме холостого хода. Если трансформатор нагружен (вторичная обмотка замкнута), то падением напряжения rI нельзя пренебречь по сравнению с ЭДС индукции.

При $\frac{N_2}{N_1} > 1$ имеем повышающий трансформатор, увеличивающий напряжение и понижающий величину тока I_2 (так как на основании закона сохранения энергии $U_2 I_2 = U_1 I_1$).

При $\frac{N_2}{N_1} < 1$ имеем понижающий трансформатор, уменьшающий напряжение и увеличивающий величину тока I_2.

Трансформаторы играют огромную роль в современной электротехнике. В мощных линиях электропередачи в настоящее время почти исключительно применяют высокие напряжения (тысячи и десятки тысяч вольт). Это позволяет уменьшить силу тока в линии, а значит, и сечение проводов, что приводит к сильному снижению стоимости сооружения линий электропередачи. Однако, конструировать генераторы и различные приборы, на высокие напряжения достаточно трудно, так как необходимо обеспечить хорошую изоляцию. Поэтому электрические генераторы строят на низкое напряжение и затем увеличивают при помощи повышающих трансформаторов. В местах потребления электроэнергии ток высокого напряжения преобразуют при помощи понижающих трансформаторов в токи низкого напряжения (110, 220В и др.).

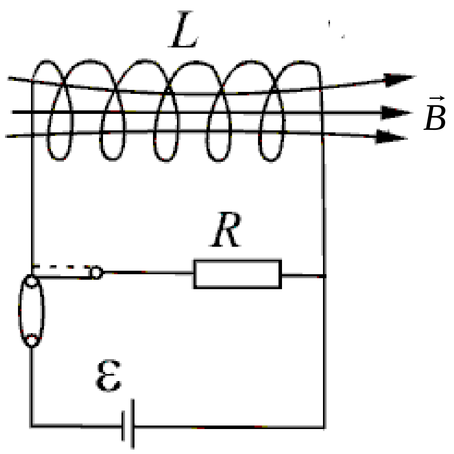
Трансформаторы имеют высокие коэффициент полезного действия, доходящий до 99%, и не содержат никаких движущихся частей, поэтому они являются удобными техническими устройствами.

Трансформатор является хорошим примером технического использования вихревого электрического поля. Именно это поле приводит в движение электроны во вторичной обмотке и служит причиной возникновения в ней ЭДС. Можно отметить, что магнитный поток, создаваемый первичной обмоткой, практически сосредоточен внутри сердечника трансформатора, в то время как вихревое электрическое поле существует как внутри сердечника, так и снаружи. Поэтому ЭДС во вторичной обмотке возникает и при наличии зазора между сердечником и обмоткой.

14.5. Энергия магнитного поля

Рассмотрим цепь, изображенную на рисунке. Сначала замкнем соленоид L на батарею ε. В нем установится ток I, который обусловит магнитное поле, сцепленное с витками соленоида. Если, отключив соленоид от батареи, замкнуть его через сопротивление R, то в образовавшейся цепи будет некоторое время течь постепенно убывающий ток. Работа, совершаемая этим током за время dt, равна:

$$dA = \varepsilon_s I dt = -\frac{d\Psi}{dt} I dt = -I d\Psi. \qquad (23)$$



Если индуктивность соленоида не зависит от I ($L = const$), то $d\Psi = LdI$ и выражение (278) принимает следующий вид:

$$dA = -LIdI. \qquad (24)$$

Проинтегрировав это выражение по I в пределах от I до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля:

$$A = \int_I^0 LIdI = \frac{LI^2}{2}. \qquad (25)$$

Работа (25) идет на приращение внутренней энергии проводников, т.е., на их нагревание. Совершение этой работы сопровождается исчезновением магнитного поля, которое первоначально существовало в окружающем соленоид пространстве. Поскольку никаких других изменений в окружающем пространстве не происходит, то остается заключить, что магнитное поле является носителем энергии, за счет которой и совершается работа (23). Таким образом, проводник с индуктивностью L, по которому течет ток силы I, обладает энергией:

$$W = \frac{LI^2}{2}, \qquad (26)$$

которая локализована в возбуждаемом током магнитном поле.

Выражение (26) можно трактовать как работу, которую необходимо совершить против ЭДС самоиндукции в процессе нарастания тока от 0 до I и которая идет на создание магнитного поля, обладающего энергией (26). Работа, совершаемая против ЭДС самоиндукции, равна:

$$A' = \int_0^I (-\varepsilon_s)Idt = \int_0^I L\frac{dI}{dt}Idt = \int_0^I LIdI = \frac{LI^2}{2},$$

что совпадает с (26). Работа (26) идет целиком на создание магнитного поля, сцепленного с витками соленоида. Выражение (26) не учитывает той работы, которую источник ЭДС затрачивает в процессе установления тока на нагревание проводников. (Она равна $A'' = \int_0^t RI^2dt$).

Выразим энергию магнитного поля (281) через величины, характеризующие само поле. Для бесконечно длинного соленоида:

$$L = \mu_0\mu n^2 V, \; H = nI, \text{ откуда } I = \frac{H}{n}.$$

Подставляя эти значения в (282) и, произведя преобразования, получим:

$$W = \frac{\mu_0\mu H^2}{2}V. \qquad (27)$$

Магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида. Следовательно, энергия (27) локализована внутри соленоида и распределена по его объему с постоянной плотностью $\omega_{ì} = \dfrac{W}{V}$. Отсюда получим выражение для плотности энергии магнитного поля:

$$\omega_{ì} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \tag{28}$$

Воспользовавшись соотношением $B = \mu_0 \mu H$, получим:

$$\omega_{ì} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \tag{29}$$

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V. Таким образом, если магнитное поле неоднородно, то оно будет находиться по выражению:

$$W = \int_V \omega_{ì}\, dV = \int_V \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} dV, \tag{30}$$

где H является функцией координат.

Можно показать, что в случае связанных контуров (при отсутствии ферромагнетиков) энергия поля определяется формулой:

$$W = \frac{L_1 I_1^{\,2}}{2} + \frac{L_2 I_2^{\,2}}{2} + \frac{L_{12} I_1 I_2}{2} + \frac{L_{21} I_2 I_1}{2}. \tag{31}$$

Для энергии N связанных контуров получается аналогичное выражение:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N} L_{ik} I_i I_k \,, \tag{32}$$

где $L_{ik} = L_{ki}$ – взаимная индуктивность i–го и k–го контуров, а $L_{ii} = L_i$ – индуктивность i–го контура.