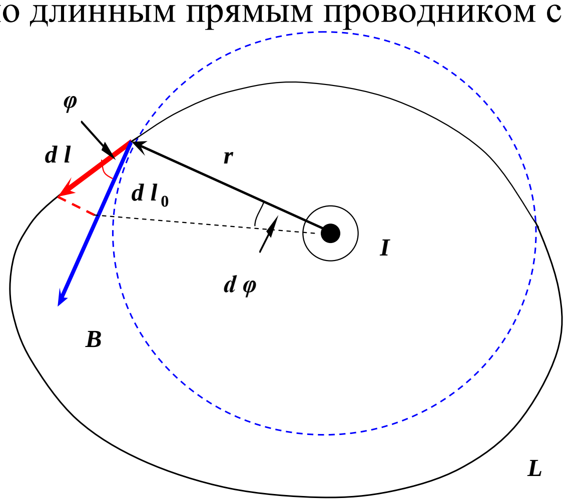
<u>ТЕМА 10. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА ИНДУКЦИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ</u>

10.1. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока)

Сформулируем теорему о **циркуляции вектора магнитной индукции (закон полного тока): циркуляция вектора магнитной индукции по произвольному замкнутому контуру, охватывающему токи прямо пропорциональна алгебраической сумме токов, пронизывающих этот контур** $\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 \sum I_i$.

Проведем доказательство теоремы на примере поля, созданного бесконечно длинным прямым проводником с током *I*.



L – замкнутый контур произвольной формы.

Вектор магнитной индукции $\vec{B} \perp \vec{r}$ – радиус- вектору.

dl – элемент произвольного контура *L*.

dl_0 – элемент силовой линии прямого бесконечного тока (окружности).

φ – угол между *dl* и dl_0 или $\varphi = \angle \vec{B}, d\vec{l}$.

$dl_0 = dl\cos\varphi$ - проекция *dl* на *B*.

$$\left.\begin{aligned} &\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \oint_L Bdl\cos\varphi = \oint_L Bdl_0. \\ &B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \\ &dl_0 = rd\varphi. \end{aligned}\right\} \quad \oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} rd\varphi = \frac{\mu_0 I r}{2\pi r}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I.$$

В общем случае, так как $I = \int_S (\vec{j}d\vec{S})$, то

$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}d\vec{S}.) \quad (1)$$

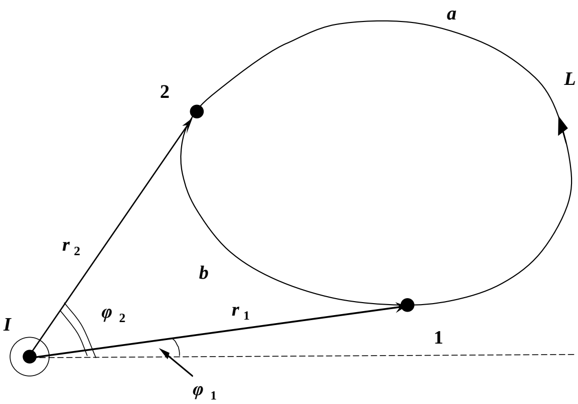
Сделаем вывод:

Магнитное поле прямолинейного тока не является потенциальным (вихревое) т.к. циркуляция индукции магнитного поля не равна нулю $\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) \neq 0.$

(Электрическое поле – потенциальное, для него циркуляция вектора напряженности равна нулю (условие потенциальности поля) $\oint_L (\vec{E}d\vec{l}) = 0.$*)*

Сопоставление выражений ($\oint E_l dl = 0$) и $\oint B_l dl = \mu_0 \int j_n dS$ для циркуляций $\vec{E}$ и $\vec{B}$ говорит о том, что между электростатическим и магнитным полями имеется принципиальное различие. Циркуляция напряженности электростатического поля всегда равна нулю. Электростатическое поле потенциально и может быть охарактеризовано потенциалом φ. Циркуляция магнитной индукции отлична от нуля, если контур, по которому берется циркуляция, охватывает ток. Поля, обладающие таким свойством, называются вихревыми (или соленоидальными).

Если произвольный контур не охватывает ток, то



$$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \oint_{1a2} (\vec{B}d\vec{l}) + \oint_{2b1} (\vec{B}d\vec{l}) =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi + \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} d\varphi =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\varphi_2 - \varphi_1 + \varphi_1 - \varphi_2\right) = 0.$$

Циркуляция вектора ***B*** прямолинейного тока вдоль замкнутого контура, не охватывающего этот проводник, равна нулю.

Если контур охватывает несколько токов, циркуляция вектора $\vec{B}$ равна их алгебраической сумме:

$$\oint_l (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 \sum_i I_i \, . \qquad (2)$$

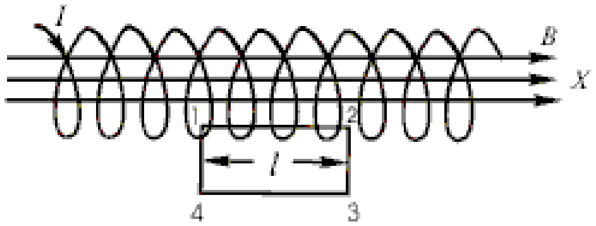
на основании (33). Этот потенциал не был бы однозначным – после каждого обхода по контуру, охватывающему ток, и возвращения в первоначальную точку он получал бы приращение, равное $\mu_0 I$. В отличие от электростатического поля, силовые линии которого начинаются и заканчиваются на зарядах, линии индукции магнитного поля всегда замкнуты, т.е., магнитных зарядов в природе не существует.

Теорема о циркуляции магнитного поля (закон полного тока) - аналог закона Гаусса в электростатике, так как с его помощью можно рассчитать магнитное поле тел, обладающих геометрической симметрией.

10.2. Применение теоремы о циркуляции магнитного поля к расчету полей

10.2.1. Магнитное поле соленоида

Магнитную индукцию поля бесконечно длинного соленоида можно вычислить, используя закон полного тока. Соленоид представляет собой тонкий провод, навитый плотно виток к витку на цилиндрический каркас. Он эквивалентен системе одинаковых круговых токов с общей прямой осью. Бесконечно



длинный соленоид симметричен относительно любой перпендикулярной его оси плоскости. В любой точке внутри и вне соленоида вектор $\vec{B}$ может иметь лишь направление параллельное оси. Возьмем прямоугольный контур (1–2–3–4). Циркуляцию $\vec{B}$ по этому контуру (1–2–3–4) можно представить следующем образом:

$$\oint_l B_l dl = \int_1^2 B_l dl + \int_2^3 B_l dl + \int_3^4 B_l dl + \int_4^1 B_l dl$$

Второй и четвертый интегралы равны нулю, так как вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к участкам контура, по которым они берутся. Для участка 3–4 на большом расстоянии от соленоида поле должно быть очень слабым, поэтому третьим слагаемым можно пренебречь. Тогда:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{l} = \int_1^2 B_l dl = Bl,$$

где B –магнитная индукция в тех точках, где располагается отрезок 1-2, l – длина этого отрезка.

Если отрезок проходит внутри соленоида на любом расстоянии от его оси контур охватывает суммарный ток nlI , где n – число витков соленоида, приходящееся на единицу длины, I – сила тока соленоида. Поэтому $\oint_l B_l dl = Bl = \mu_0 nIl$ откуда

$$B = \mu_0 nI \qquad (3)$$

Если отрезок 1 – 2 располагается вне соленоида, то охватываемый контуром ток равен нулю и $\oint_l B_l dl = Bl = 0$, т.е. $B = 0$. Таким образом, вне бесконечно длинного соленоида магнитная индукция равна нулю, внутри – всюду одинакова и имеет величину определяемую формулой (3), т.е. <u>магнитное поле внутри соленоида является однородным.</u>

В магнитную индукцию на оси соленоида симметрично расположенные витки вносят одинаковый вклад. Поэтому, у конца полу бесконечного соленоида на его оси магнитная индукция равна половине значения (3), т.е.,

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI\ . \qquad (4)$$

Практически, если длина соленоида значительно больше, чем его диаметр, формула (3) будет справедлива для точек в средней части соленоида, а формула (4) – для точек на оси вблизи его концов.

10.2.2. Магнитное поле тороида

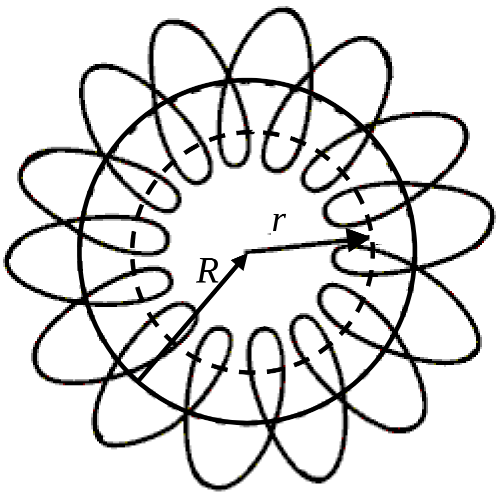
Тороид представляет собой тонкий провод, плотно навитый на каркас, имеющий форму тора. Он эквивалентен системе одинаковых круговых токов, центры которых расположены на окружности радиуса R. Возьмем контур в виде окружности радиуса r, центр которой совпадает с центром тороида. В силу симметрии вектор $\vec{B}$ в каждой точке должен быть направлен по касательной к контуру, следовательно:

$$\oint B_l dl = B2\pi r,$$

где B – магнитная индукция в тех точках, где проходит контур.

Если контур проходит внутри тороида r, он охватывает ток $2\pi RnI$, где R – радиус тороида, n – число витков на единицу длины. В этом случае:

$$B2\pi r = \mu_0 2\pi RnI\ ,$$



откуда

$$B = \mu_0 nI\frac{R}{r} \qquad (5)$$

Контур, проходящий вне тороида, токов не охватывает, поэтому для него $B2\pi r = 0$. Таким образом, вне тороида магнитная индукция равна нулю.

Индукция поля на различных расстояниях r от центра тороида различна. При $r=R$,

$$B = \mu_0 nI \qquad (6)$$

В этом случае поле можно считать однородным в каждом из сечений тороида.

10.3. Закон полного тока в дифференциальной форме

По теорему Стокса циркуляция вектора $\vec{A}$ по произвольному контуру L равна потоку ротора этого вектора через поверхность, опирающуюся на этот контур: $\oint\limits_L(\vec{A}d\vec{l}) = \int\limits_S(rot\vec{A}d\vec{S}.)$. Зная $rot\vec{A}$ в каждой точке некоторой поверхности S, можно вычислить циркуляцию этого вектора $\vec{A}$ по контуру L, ограничивающему поверхность S.

$rot\vec{A}$– циркуляция вектора $\vec{A}$ по контуру L, который охватывает площадь $\Delta S \to 0$ и ориентирован таким образом, чтобы эта циркуляция была максимальной (max).

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\oint_L (\vec{A}d\vec{l})}{\Delta S} = \frac{d\oint_L (\vec{A}d\vec{l})}{dS} = rot_n \vec{A}$$

–проекция вектора $rot\ \vec{A}$ на положительную нормаль $\boldsymbol{n}$ к площадке dS, охватываемой контуром L (ΔS стремится к точке).

Циркуляция вектора характеризует свойства силового поля, усредненные по поверхности, охватываемой контуром L..

$$rot\vec{A} \equiv \left[\nabla\vec{A}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\cdot\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\cdot\vec{j} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right)\cdot\vec{k}.$$

Согласно теоремы Стокса:

$$\oint_L (\vec{A}d\vec{l}) = \int_S (rot\vec{A}d\vec{S}.)$$ для магнитного поля $$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \int_S (rot\vec{B}d\vec{S}).$$

Закон полного тока в интегральной форме: $$\oint_L (\vec{B}d\vec{l}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}d\vec{S}).$$

$$\int_S (rot\vec{B}d\vec{S}) = \mu_0 \int_S (\vec{j}d\vec{S}).$$

$$rot\vec{B} = \mu_0 \vec{j}; \qquad rot\vec{H} = \vec{j}. \qquad (7)$$

Согласно формуле (7) ротор вектора $\vec{B}$ в произвольной точке поля равен умноженной на μ_0 плотности тока $\vec{j}$ в этой же точке. Направление силовых линий вектора $\vec{B}$ связано правилом буравчика с направлением вектора плотности тока $\vec{j}$.