Лекция 5

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Термины и понятия

Метод интегрального исчисления
Момент импульса
Момент инерции тела
Момент силы
Плечо силы
Реакция опоры
Теорема Штейнера

5.1. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

При изучении вращения твердых тел будем пользоваться понятием момента инерции.

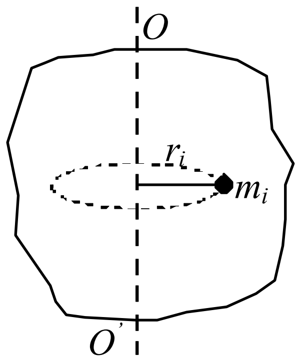
Разобьем тело на такие малые части, что каждую из них можно считать материальной точкой. Пусть m_i – масса i-ой материальной точки, r_i – ее расстояние до некоторой оси OO'.

Величина, равная произведению массы материальной точки на квадрат кратчайшего расстояния ее до данной оси, называется моментом инерции материальной точки относительно оси:

$$I_i = m_i r_i^2 \,. \qquad (29)$$

Сумма моментов инерции всех материальных точек тела называется <u>моментом инерции тела</u> относительно некоторой оси:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \,. \qquad (30)$$



Момент инерции твердого тела зависит, как нетрудно видеть, от распределения масс относительно интересующей нас оси.

Если тело представляет собой обруч массы m, толщина которого мала по сравнению с радиусом R, то момент его инерции относительно оси, проходящей через центр и перпендикулярной к плоскости обруча, равен

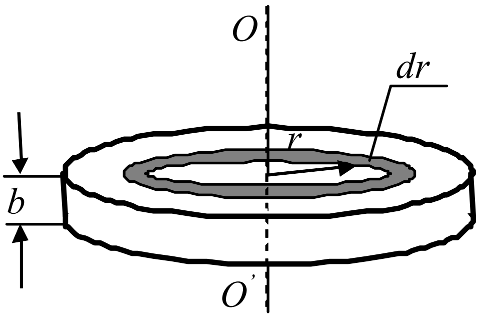
$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i R^2 = R^2 \sum_i m_i = mR^2.$$

Для тел более сложной формы суммирование выражения (30) производится методами интегрального исчисления согласно формуле:

$$I = \int_V r^2 dm\,, \tag{31}$$

где интегрирование производится по всему объему тела. Величина r в этом случае есть функция положения точки с координатами x, y, z.

В качестве примера найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр. Разобьем диск на кольцевые слои толщиной dr.



Все точки одного слоя будут находиться на одинаковом расстоянии от оси, равном r. Объем такого слоя равен:

$$dV = b \cdot 2\pi\, r\, dr\,,$$

где b – толщина диска. Поскольку диск однороден, плотность его ρ во всех точках одинакова и

$$dm = \rho \cdot\ dV = 2\pi\ r\ b\ \rho\ dr\,,$$

где dm – масса кольцевого слоя.

Теперь по формуле (31) находим момент инерции.

$$I = \rho \int_0^R r^2\ b\ 2\pi\ r\ dr\,,$$

где R – радиус диска.

$$I = 2\pi\ \rho\ b \int_0^R r^3 dr = 2\pi\ b\ \rho \frac{R^4}{4}\,.$$

Наконец, введя массу диска m равную произведению плотности ρ на объем диска $b\ \pi\ R^2$, получим

$$I = \frac{mR^2}{2}\,.$$

Моменты инерции некоторых однородных твердых тел относительно оси, проходящей через центр масс тела, приведены в следующей таблице:

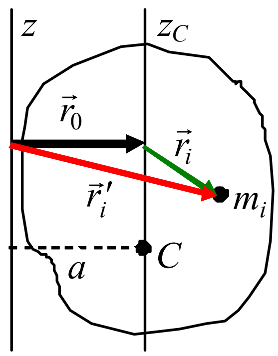
Твердое тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Тонкий стержень длины ℓ	Перпендикулярна стержню и проходит через центр тяжести	$1/12\, m\ell^2$
Сплошной цилиндр радиуса R	Ось вращения совпадает с осью цилиндра и проходит через центр тяжести	$1/2\, mR^2$
Тонкий диск радиуса R	Ось вращения совпадает с диаметром диска	$1/4\, mR^2$
Шар радиуса R	Ось вращения проходит через центр тяжести шара	$2/5\, mR^2$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то можно найти момент инерции относительно любой другой параллельной оси. Для этого надо воспользоваться теоремой Гюйгенса-Штейнера:

момент инерции тела I относительно произвольной оси равен моменту его инерции I_c относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы тела m на квадрат расстояния a между осями:

$$I = I_c + ma^2. \tag{32}$$

Найдем связь между моментами инерции тела относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс. Найдем момент инерции тела относительно оси z параллельной оси z_C. Ось z_C проходит через центр масс тела. Разделим мысленно тело на частицы массой m_i , где i – порядковый номер. Определим положение каждой частицы относительно осей z и z_C . В соответствии с определением момента инерции $I_i = m_i r_i^2$, где r_i – это кратчайшее расстояние до оси вращения (радиус окружности, которую описывает точка при своем движении вокруг оси вращения).



Из рисунка видно, что $\vec{r}_i' = \vec{r}_i + \vec{r}_0$, тогда момент инерции точки массой m_i относительно оси z равен: $I_i = m_i r_i'^2$, а для всего тела момент инерции относительно оси z равен сумме моментов инерции всех частиц тела относительно этой же оси:

$$I_z = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i (\vec{r}_i + \vec{r}_0)^2 = \sum_i m_i r_i^2 + \sum_i m_i r_0^2 + 2\sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_0).$$

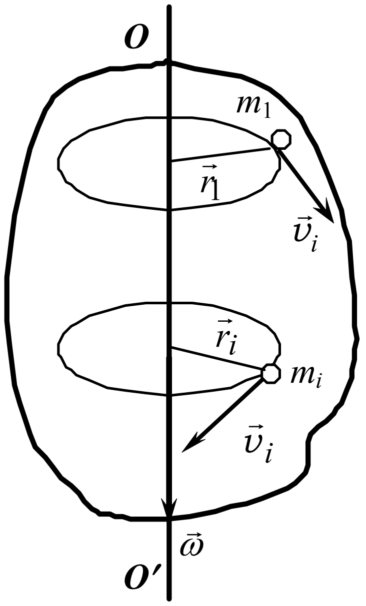
По определению $I_{z_C} = \sum m_i r_i^2$ – момент инерции тела относительно оси z_C, проходящей через центр масс тела; $\sum_i m_i = m$, тогда $\sum_i m_i r_0^2 = ma^2$. Выражение $2\sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_0)$ можно преобразовать $2\sum_i m_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_0) = 2(\sum_i m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_0)$. Величина, равная $\sum_i m_i \vec{r}_i = m\vec{r}_C$ определяет положение центра масс тела относительно оси z_C. Из рисунка видно, что $\vec{r}_C = 0$, так как центр масс лежит на оси z_C.

Тогда получим $I_z = I_{z_C} + ma^2$ – момент инерции I_z тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции тела I_{z_C} относительно параллельной ей оси z_C, проходящей через центр масс, и величины ma^2, где m – масса тела, a – расстояние между осями.

Пример. Момент инерции тонкого стержня (массы m и длины ℓ) относительно оси, перпендикулярной стрежню и проходящей через его конец, равен

$$I = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m\ell^2.$$

5.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси OO'. Мысленно разобьем тело на материальные точки массой m_i. Каждая материальная точка движется по окружности радиуса r_i с линейной скоростью $\vec{v}_i$. Кинетическая энергия вращающегося тела равна сумме кинетических энергий этих точек:

$$E_K = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2}.$$

Линейная скорость материальной точки зависит от расстояния до оси вращения r_i:

$$v_i = \omega r_i,$$

где ω – угловая скорость тела.

Отсюда $E_K = \dfrac{\omega^2}{2}\sum_i m_i r_i^2$,

так как $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$, то $$E_K = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (33)$$

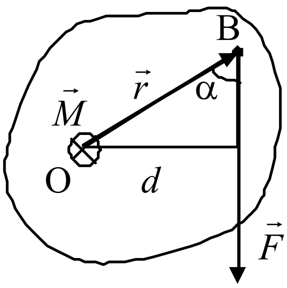
где I – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – его угловая скорость.

В случае плоского движения тела, например, шара, скатывающегося с наклонной плоскости без скольжения, энергия складывается из энергии поступательного движения и энергии вращения:

$$E_K = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c\omega^2}{2},$$

где m – масса тела; υ_c – скорость центра масс тела; I_c – момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω – угловая скорость тела.

5.3. МОМЕНТ СИЛЫ



Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси. Пусть сила $\vec{F}$ лежит в плоскости, перпендикулярной к оси вращения 0. $\vec{r}$ – радиус вектор точки приложения силы относительно оси вращения; d – кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы, называемое плечом силы.

Векторная величина, численно равная произведению силы на плечо, называется моментом силы относительно оси вращения.

$$M = F \cdot d. \qquad (34)$$

Как видно из рисунка:

$$d = r \cdot \sin\alpha,$$
$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha,$$

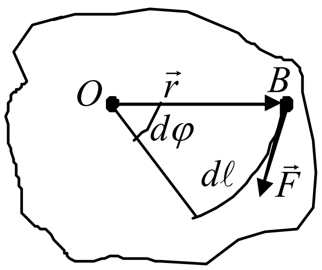
то есть в векторном виде:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right].$$

Направление $\vec{M}$ совпадает с направлением поступательного движения винта при его вращении от $\vec{r}$ к $\vec{F}$ (в нашем примере вдоль оси вращения «от нас»).

В частном случае, когда $\alpha = 0$, $M = 0$ (линия действия силы пересекает ось вращения). Такая сила уравновешивается реакцией опоры и вращения не вызывает.

5.4. УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА



Пусть тело вращается вокруг оси O под действием силы $\vec{F}$. Найдем работу этой силы.

При повороте тела на бесконечно малый угол $d\varphi$ точка приложения силы B проходит путь:

$$d\ell = r \cdot d\varphi,$$

где r – радиус окружности, описываемой точкой B. Элементарная работа равна:

$$dA = F \cdot r \cdot d\varphi = F \cdot r \cdot \omega \cdot dt. \qquad (35)$$

Эта работа идет на увеличение кинетической энергии вращающегося тела, так как $E_k = \dfrac{I\omega^2}{2}$, а $dA = dE_K$, то

$$dE_K = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\ \omega\ d\omega.$$

Поэтому $\qquad F \cdot r \cdot \omega \cdot dt = I\ \omega\ d\omega.$

Радиус окружности r является плечом силы F, следовательно, $M = F \cdot r$ и

$$Mdt = Id\omega$$

или

$$M = I\frac{d\omega}{dt} = I \cdot \varepsilon.$$

Учтя, что векторы $\vec{M}$ и $\vec{\varepsilon}$ имеют одинаковое направление, придем к соотношению: $\qquad \vec{M} = I\vec{\varepsilon}. \qquad (36)$

Это – основное уравнение динамики вращательного движения вокруг неподвижной оси. Оно напоминает второй закон Ньютона для поступательного движения. Роль массы играет момент инерции I, роль линейного ускорения – угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$, роль силы – момент силы $\vec{M}$.

Из этого уравнения, в частности, видно, что момент инерции I определяет инерционные свойства тела при вращении: при одном и том же значении момента сил $\vec{M}$, тело с большим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$. Заметим, что работа при вращении тела согласно (35) равна: $dA = F \cdot r \cdot d\varphi = F \cdot r \cdot \omega \cdot dt$. На рис.22 сила $\vec{F} \perp \vec{r}$, поэтому $\vec{M} = \left[\vec{r}\vec{F}\right]$ или $M = F \cdot r$. С другой стороны $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} \cdot dt$ – угловое перемещение. Вектора $\vec{M}$ и $d\vec{\varphi}$ направлены по одной прямой, поэтому $dA = (\vec{M} \cdot d\vec{\varphi})$ или

$$dA = M \cdot d\varphi. \qquad (37)$$

Сравним с формулой для работы при поступательном движении тела $dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r})$.

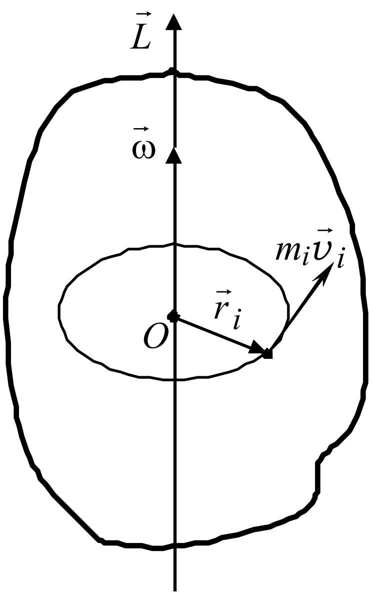
5.5. МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Рассмотрим движение отдельных точек тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Каждая из них массой m_i движется по окружности постоянного радиуса r_i. Ее линейная скорость $\vec{\upsilon}_i$, импульс $m_i\,\vec{\upsilon}_i$. Скорость и импульс перпендикулярны радиусу, то есть радиус является плечом вектора $m_i\,\vec{\upsilon}_i$. Поэтому можно записать, что момент импульса данной точки равен

$$L_i = m_i\,\upsilon_i\,r_i, \qquad \vec{L}_i = \left[\vec{r}_i\vec{P}_i\right]$$

и направлен по оси вращения в сторону, определяемую правилом правого винта. Учитывая, что $\upsilon_i = \omega r_i$, получим: $L_i = m_i r_i^2 \omega = I_i \omega_i$, где I_i – момент инерции материальной точки m_i относительно оси вращения.



Момент импульса твердого тела относительно оси равен сумме моментов импульсов всех его точек:

$$L = \sum_i I_i\omega, \text{ или}$$

$$L = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_i m_i r_i^2 = I\omega.$$

Итак, **момент импульса твердого тела относительно оси равен произведению момента инерции тела относительно этой же оси на угловую скорость.**

Учтя, что векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ имеют одинаковое направление, придем к соотношению:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (38)$$

При описании динамики вращательного движения момент импульса играет такую же роль, что и импульс при поступательном движении.

Сопоставим основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение.

Поступательное движение		**Вращательное движение**	
Масса	m	Момент инерции	I
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M}$
Импульс	$\vec{P} = m\vec{v}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a}$	Основное уравнение динамики	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
Работа	$dA = F_S dS$	Работа	$dA = Md\varphi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{I\omega^2}{2}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что такое момент инерции тела?
2. Какой физический смысл имеет момент инерции?
3. Выведите формулу для момента инерции обруча.
4. Сформулируйте и поясните теорему Штейнера.
5. Что называется моментом силы относительно оси вращения?
6. Выведите и сформулируйте уравнение динамики вращательного движения твердого тела.
7. Что такое момент импульса материальной точки? Твердого тела?
8. Как определяется направление вектора момента импульса?
9. Выведите и сформулируйте закон сохранения момента импульса. Приведите примеры.