Лекция 4

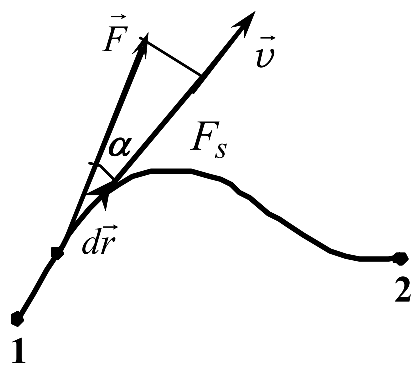
РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

Термины и понятия

Ватт
Возвращающая сила
Градиент функции
Графическая зависимость
Джоуль
Диссипативные силы
Кинетическая энергия
Консервативные силы
Мощность
Неустойчивое равновесие
Отдельно взятое тело
Поле гравитационных сил
Поле упругих сил
Потенциальная кривая
Потенциальная энергия
Потенциальная яма
Потенциальный барьер
Работа силы
Силовое поле
Тепловая энергия
Упруго деформированное тело
Устойчивое равновесие
Частная производная
Электромагнитная энергия
Элементарная работа
Ядерная энергия

4.1. РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ

Пусть тело под действием силы F совершает перемещение по некоторой траектории 1 – 2. В общем случае сила $\vec{F}$ в процессе движения тела может меняться как по модулю, так и по направлению.



Рассмотрим элементарное перемещение, в пределах которого силу $\vec{F}$ можно считать постоянной.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина

$$dA = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r}\right) = F\cos\alpha \cdot dS = F_S dS, \qquad (23)$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$, $dS = \left|d\vec{r}\right|$ – элементарный путь, F_S – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$, $F_S = F \cdot \cos\alpha$.

Сила $\vec{F}$, действующая на материальную точку, как правило, изменяется по мере перемещения материальной точки по траектории относительно системы отсчета. При этом сила может зависеть как от координат x, y, z точки, так и от скорости движения точки. Таким образом, сила $\vec{F}$ в общем случае – функция нескольких переменных. Поэтому, как показывается в математике, элементарная работа силы $\vec{F}$ не является полным дифференциалом какой-либо функции координат точки. Чтобы это подчеркнуть, элементарная работа обозначается символом δA, а не dA.

В прямоугольных декартовых координатах $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$, а $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Поэтому согласно правилу скалярного умножения векторов, элементарная работа силы $\vec{F}$ равна: $\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz$, где F_x, F_y, F_z – проекции силы $\vec{F}$ на оси координат, dx, dy, dz – проекции вектора перемещения $d\vec{r}$ на оси координат.

Работа A, совершаемая силой $\vec{F}$ на конечном перемещении материальной точки из положения 1 в положение 2, равна сумме элементарных работ силы $\vec{F}$ на всех малых участках траектории материальной точки от 1 до 2. Эта сумма сводится к интегралу.

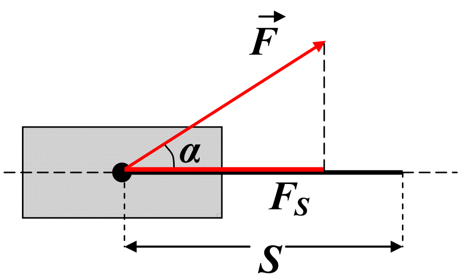
Суммируя (интегрируя) выражение (23) по всем элементарным участкам пути от точки 1 до точки 2, найдем работу силы $\vec{F}$ на данном пути:

$$A = \int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = \int_1^2 F_S dS . \tag{24}$$

Если сила имеет постоянные величину и направление, а движение прямолинейное, то проекцию вектора силы F_S в выражении для работы можно вынести за знак интеграла, в результате чего получится формула:

$$A = F_S \int_1^2 dS = F_S \cdot S = F \cdot S \cdot \cos\alpha . \tag{25}$$

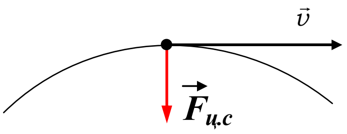
• Прямолинейное движение.

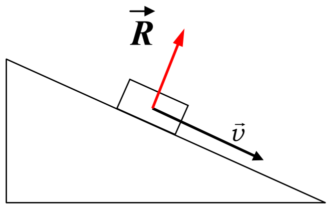


$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cos\alpha.$$

Если сила и направление перемещения образуют острый угол ($\cos\alpha$ > 0), работа положительна. Если угол α – тупой ($\cos\alpha$ < 0), работа отрицательна.

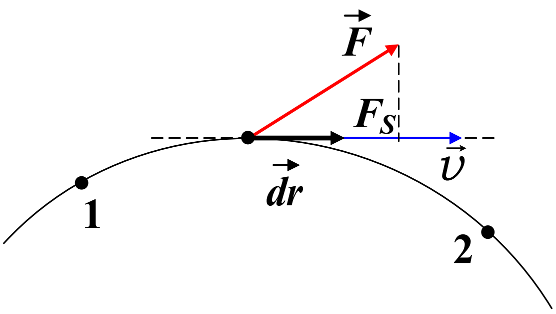
При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ работа равна 0.





$\vec{F} \perp d\vec{r} \Rightarrow A = 0.$

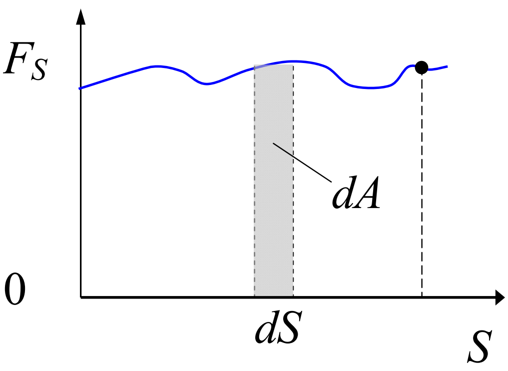
• Движение по участку траектории.



$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r} = \int_{1}^{2} F_S dS.$$

F_S – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор перемещения $d\vec{r}$

Единица работы в СИ – <u>джоуль</u> (*Дж*). 1 *Дж* – работа, совершаемая силой 1 *Н* на пути 1 *м* (1 *Дж* = 1 *Н* · *м*).



При графическом изображении $F_S(S)$ работа равна площади под кривой.

Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью. **<u>Мощность</u> – это работа, совершаемая силой за единицу времени. Средняя мощность за промежуток времени Δt**

$$N_{ср} = \frac{A}{\Delta t}.$$

Если за время dt сила $\vec{F}$ совершает работу $(\vec{F}\cdot d\vec{r})$, то мощность, развиваемая этой силой в данный момент времени (мгновенная мощность) есть $N=\frac{\delta A}{dt}=\frac{(\vec{F}d\vec{r})}{dt}$. Учитывая, что $\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{\upsilon}$, получим:

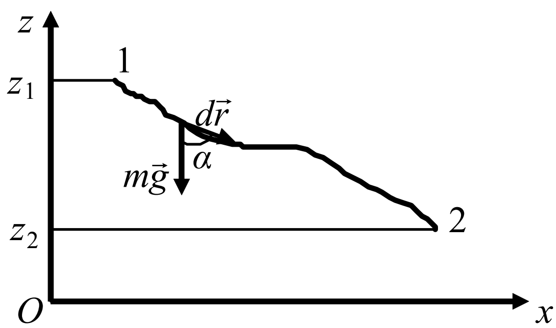
$$N=(\vec{F}\cdot\vec{\upsilon}). \qquad (26)$$

Таким образом, **мгновенная мощность, развиваемая силой $\vec{F}$, равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения данной силы.**

Как и работа, мощность – скалярная величина. Единица мощности в СИ – ватт (*Вт*): 1 *Вт* – мощность, при которой за время 1 *с* совершается работа 1 *Дж* (1 *Вт* = 1 *Дж/с*).

Выразим работу A силы на конечном пути через мгновенную мощность N. Так как мгновенная мощность $N=\frac{\delta A}{dt}$, то элементарная работа $\delta A=Ndt$, тогда $A=\int_1^2(\vec{F}d\vec{r})=\int_{t_1}^{t_2}Ndt$, где t_1 и t_2 – моменты времени, соответствующие пребыванию материальной точки в точках 1 и 2 траектории движения.

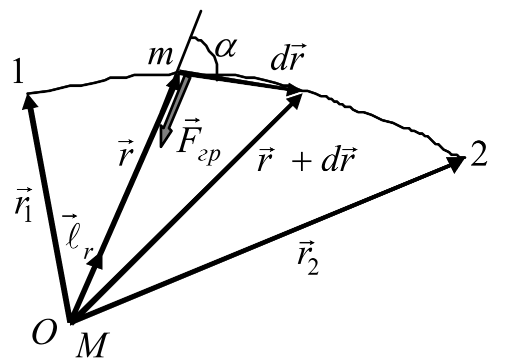
Работа силы тяжести. Пусть тело массой m перемещается вдоль произвольной траектории из точки 1 в точку 2. При этом на тело (материальную точку) действует постоянная сила тяжести $m\vec{g}$.



Работа силы тяжести равна: $A=\int_1^2(m\vec{g}\cdot d\vec{r})$. Мысленно разделим всю траекторию на элементарные участки и вычислим элементарную работу $\delta A=(m\vec{g}\cdot d\vec{r})$ на одном из них: $\delta A=(m\vec{g}\cdot d\vec{r})=mg|dr|\cdot\cos\alpha=-mg\cdot dz$, где α – угол между векторами $\vec{g}$ и $d\vec{r}$, dz – приращение координаты z тела, соответствующее его перемещению $d\vec{r}$, $dz=-|dr|\cdot\cos\alpha$. Как видно из полученного выражения, элементарная работа зависит только от переменной z. При перемещении тела из точки 1 в точку 2 траектории координата z изменяется в пределах от z_1 до z_2. Тогда работа силы тяжести равна: $A = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_1^2 (m\vec{g} \cdot d\vec{r}) = -\int\limits_{z_1}^{z_2} mg \cdot dz = mg(z_1 - z_2)$.

Из полученной формулы видно, что **работа силы тяжести не зависит от формы траектории движения тела, а определяется только ее координатой z в начальном и конечном положении.**

Работа гравитационной силы. Пусть в точке O пространства находится тело (материальная точка) массы M, которое действует на тело (материальную точку) массой m с силой гравитационного взаимодействия $\vec{F}_{гр}$: $\vec{F}_{гр} = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2} \vec{\ell}_r$,



где $\vec{\ell}_r$ – единичный вектор, направленный по вектору $\vec{r}$, γ – гравитационная постоянная.

Если тело переместилось из точки 1 в точку 2 траектории под действием гравитационной силы взаимодействия, то работа гравитационной силы на этом пути равна: $A = \int\limits_1^2 (\vec{F}_{гр} d\vec{r}) = -\int \gamma \dfrac{Mm}{r^2} (\vec{\ell}_r d\vec{r})$.

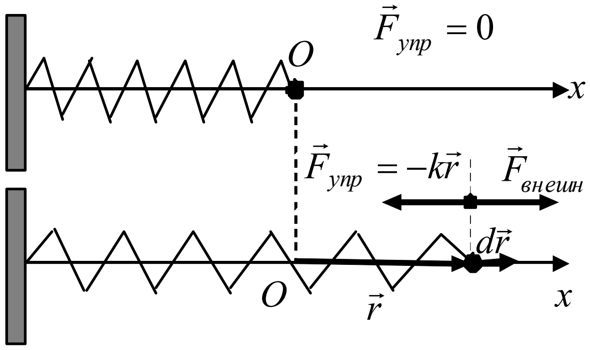
Работа δA гравитационной силы на элементарном перемещении $d\vec{r}$ (одном из элементарных участков траектории) равна $\delta A = (\vec{F}_{гр} d\vec{r}) = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2} (\vec{\ell}_r d\vec{r}) = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2} |\vec{\ell}_r| |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha = -\gamma \dfrac{Mm}{r^2} dr$, где величина $dr = |d\vec{r}| \cdot \cos\alpha$ равна приращению dr модуля радиус-вектора $\vec{r}$.

При перемещении тела из точки 1 в точку 2 модуль его радиус-вектора изменяется от $\vec{r}_1$ до $\vec{r}_2$, поэтому работа гравитационной силы на пути между точками 1 и 2 равна:

$$A = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_1^2 (\vec{F}_{гр} d\vec{r}) = -\int\limits_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \cdot \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Работа гравитационной силы не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением тела относительно другого тела.

Работа упругой силы. Рассмотрим пружину, один конец которой закреплен, а другой может перемещаться горизонтально под действием внешней силы. Направим координатную ось x параллельно оси пружины и выберем начало отсчета координаты x ($x = 0$) в положении незакрепленного конца недеформированной пружины (точка O).

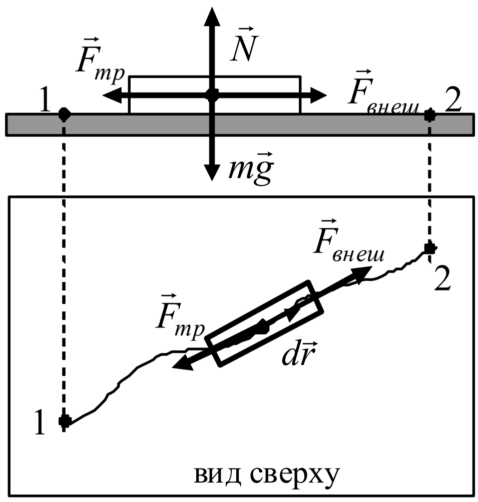


При растяжении или сжатии пружины возникает упругая сила $\vec{F}_{упр} = -k\vec{r}$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор, проведенный из точки O к незакрепленному концу деформированной пружины. Под действием внешней силы $\vec{F}_{внеш}$, работу которой рассматривать не будем, незакрепленный конец пружины, к которому приложена также $\vec{F}_{упр}$, переместится на $d\vec{r}$. Если незакрепленный конец пружины переместился вдоль оси x из точки с координатой x_1 в точку с координатой x_2, то работа $\vec{F}_{упр}$ равна: $A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F}_{упр} d\vec{r}) = \int_1^2 (-k\vec{r} d\vec{r})$ или в проекции на ось x

$$A = \int_1^2 (-k\vec{r} d\vec{r}) = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{k}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Из полученного выражения видно, что **работа упругой силы на конечно пути зависит только от начальной x_1 и конечной x_2 координат точки приложения силы.**

<u>Работа силы трения скольжения.</u> Рассмотрим тело массой m, движущееся по горизонтальной поверхности под действием внешней силы $\vec{F}_{внеш}$ по произвольной криволинейной траектории из точки 1 в точку 2. При перемещении тела относительно поверхности между соприкасающимися телами возникает сила трения скольжения $F_{тр.ск} = \mu N = \mu mg$, где μ – коэффициент трения скольжения, а N – модуль силы нормальной реакции опоры ($N = mg$).



Работа силы трения скольжения на одном из элементарных участков траектории равна:

$$\delta A = (\vec{F}_{тр.ск} d\vec{r}) = F_{тр.ск} \left| d\vec{r} \right| \cdot \cos 180^0 = -\mu mg \cdot dS\,,$$

где $\left| d\vec{r} \right| = dS$ – модуль вектора элементарного перемещения равен элементарному пути dS. В любой момент времени вектор силы трения скольжения $\vec{F}_{тр.ск}$ направлен противоположно $d\vec{r}$. Если тело перемещается из точки 1 в точку 2, то работа силы трения будет равна:

$$A = \int_1^1 \delta A = \int (\vec{F}_{тр.ск} d\vec{r}) = -\int_1^2 kmg \cdot ds = -kmgS\,,$$

где S – пройденный телом путь по траектории.

В отличие от работы силы тяжести, гравитационной силы и упругой силы, **работа силы трения зависит от длины пройденного телом пути *S*, и, следовательно, зависит от формы траектории.**

Таким образом, среди рассмотренных сил можно выделить такие, работа которых не зависит от формы траектории и характера движения тела, а определяется только начальным и конечным положением относительно других тел. Это – сила тяжести, гравитационная сила, упругая сила.

Силы, работа которых не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положением относительно других тел, называются консервативными.

4.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Следствием действия силы на материальную точку является приобретение материальной точкой ускорения: $m\vec{a} = \vec{F}$ или $m\dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}$,

где $\vec{F}$ – результирующая сила, действующая на материальную точку.

Пусть частица массы m движется под действием некоторой силы $\vec{F}$. Найдем элементарную работу этой силы на перемещении $d\vec{r}$.

$$\delta A = \left(\vec{F}\,d\vec{r}\right) = \left(m\,\vec{a}\,d\vec{r}\right) = m\left(\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\,d\vec{r}\right) = m\left(\vec{\upsilon}\,d\vec{\upsilon}\right),$$

так как $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$, $\quad \vec{a} = \dfrac{d\vec{\upsilon}}{dt}$, $\quad \vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = \upsilon\cdot d\upsilon$.

Таким образом,

$$\delta A = m\upsilon\,d\upsilon = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right).$$

Если материальная точка перемещается из состояния 1 в состояние 2. Состояние 1 материальной точки характеризуется скоростью υ_1, а состояние 2 характеризующееся скоростью υ_2. Работа результирующей силы при переходе материальной точки из состояния 1 в состояние 2 равна: $A = \int\limits_1^2 \delta A = \int\limits_{\upsilon_1}^{\upsilon_2} m\upsilon d\upsilon = \dfrac{m\upsilon_2^2}{2} - \dfrac{m\upsilon_1^2}{2}$.

Выражение $E_к = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$ называется кинетической энергией материальной точки. Кинетическая энергия является скалярной мерой движения.

Итак, работа результирующей силы равна приращению кинетической энергии материальной точки.

В интегральной форме данное утверждение записывается в виде:

$$A_{1-2} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} \text{ или } A_{1-2} = \Delta E_к.$$

В дифференциальной форме – в виде: $\delta A = d\left(\dfrac{m\upsilon^2}{2}\right)$ или $\delta A = dE_к$.

Уравнения $A_{1-2} = \Delta E_к$ и $\delta A = dE_к$ называются теоремами об изменении кинетической энергии (в интегральной и дифференциальной формах соответственно).

Согласно теоремы изменение кинетической энергии материальной точки обусловлено тем, что результирующая сила совершает работу. Изменение кинетической энергии означает изменение модуля скорости тела.

Таким образом, кинетическая энергия это механическая энергия, которой обладает тело массой m, движущееся со скоростью $\vec{\upsilon}$.

$$E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

При конечном перемещении из точки 1 в точку 2 работа силы идет на приращение кинетической энергии:

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 dE_K = E_{K2} - E_{K1},$$

$$A_{12} = E_{K2} - E_{K1}. \qquad (27)$$

Если $A_{12} > 0$, то $E_{K2} > E_{K1}$, т.е. кинетическая энергия частицы увеличивается; если же $A_{12} < 0$, то кинетическая энергия уменьшается.

4.3. ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

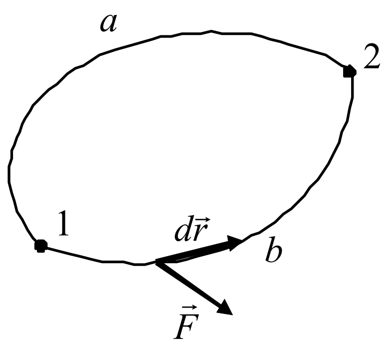
Потенциальная энергия – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними. Если на тело (материальную точку) в каждой точке пространства действует определенная сила, то всю совокупность сил называют силовым полем. Если силы не зависят от времени, силовое поле называется стационарным. Например, тело массой m, расположенное вблизи поверхности Земли, испытывает действие силы тяжести $m\vec{g}$. Величина и направление силы тяжести можно считать приблизительно одинаковыми во всех точках пространства вблизи поверхности Земли. Тело находится в однородном поле силы тяжести.

Пусть взаимодействие между телами осуществляется с помощью силовых полей (например, поле гравитационных сил, поле упругих сил), которые обладают следующим свойством: работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от траектории тела, а зависит только от начального и конечного положения тела. Такие силы называются <u>консервативными</u>. Поле консервативных сил называется консервативным.

Если работа, совершаемая силой, зависит от траектории тела, то такая сила называется <u>неконсервативной;</u> ее примером является сила трения.

Покажем, что при перемещении тела в консервативном поле работа консервативных сил по замкнутой траектории равна нулю.

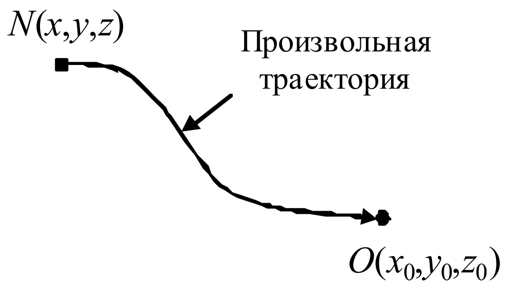
Работа консервативной силы не зависит от вида траектории точки между ее начальным (1) и конечным (2) положениями, ни от закона движения материальной точки по траектории: $A_{1-a-2} = A_{1-b-2} = A_{1-2}$, где A_{1-a-2} и A_{1-b-2} – работа консервативной сила при перемещении материальной точки из 1 в 2 по траекториям 1–a–2 и 1–b–2. Изменение направления движения материальной точки на противоположное вызывает изменение знака проекции консервативной силы $\vec{F}$ на направление перемещения, поэтому знак элементарной работы также изменяется $\delta A = (\vec{F} d\vec{r})$. Следовательно, $A_{1-b-2} = -A_{2-b-1}$, поэтому работа консервативной силы вдоль замкнутой траектории 1–b–2–a–1 равна нулю:



$$A_{1-b-2-a-1} = A_{1-b-2} + A_{2-a-1} = -A_{2-b-1} + A_{2-a-1} = 0.$$

Точки 1 и 2, а также участки замкнутой траектории 1–a–2 и 2–b–1 можно выбирать совершенно произвольно. Таким образом, работа консервативной силы на произвольной замкнутой траектории L точки ее приложения равна нулю: $\oint_L (\vec{F} d\vec{r}) = 0$. В этой формуле кружок на знаке интеграла показывает, что интегрирование производится по замкнутому контуру L.

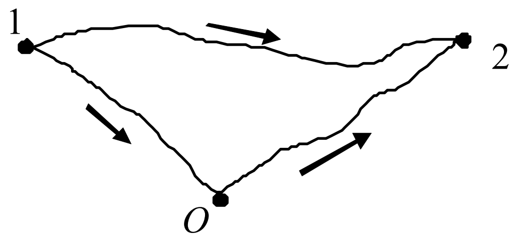
Пусть имеется консервативное силовое поле. Материальная точка (тело) расположена в точке $N(x,y,z)$ этого поля. Выберем произвольную точку O этого поля (ее координаты x_0,y_0,z_0), и назовем ее началом отсчета потенциальной энергии. В точке O потенциальная энергия материальной точки равна нулю.



Потенциальной энергией материальной точки в точке N консервативного поля называется работа сил поля, совершаемая при перемещении материальной точки из точки N в точку O, принятую за начало отсчета потенциальной

энергии: $E_П = \int\limits_N^O (\vec{F} d\vec{r})$, где $\vec{F}$ – сила поля; интеграл вычисляется по произвольной траектории между точками N и O.

Так как поле консервативное, то потенциальная энергия является только функцией координат x,y,z точки поля, в которой расположена материальная точка.



Если материальная точка под действием консервативных сил поля перемещается из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2, то работа этих сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки: $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2}$, где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия материальной точки в начальном и конечном положениях. Так как работа консервативных сил не зависит от формы траектории, то найдем работу консервативных сил по двум траекториям, одна из которых проходит через точку O – начало отсчета потенциальной энергии. Обозначим A_{1-2} – работа по траектории 1-2, A_{1-O-2} – работа по траектории 1–O–2. Так как поле консервативное, то $A_{1-2} = A_{1-O-2}$.

Представим A_{1-O-2} как сумму работ на участках 1–O и O–2 по траектории 1–O–2, получим $A_{1-2} = A_{1-O-2} = A_{1-O} + A_{O-2} = A_{1-O} - A_{2-O}$.

Из определения потенциальной энергии $A_{1-O} = E_{П1}$, $A_{2-O} = E_{П2}$, тогда $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2} = -(E_{П2} - E_{П1}) = -\Delta E_П$. Элементарная работа консервативных сил $\delta A = -dE_П$.

Уравнения $A = -\Delta E_П$ и $\delta A = -dE_П$ определяют связь работы консервативных сил с изменением потенциальной энергии поля (в интегральной и дифференциальной формах соответственно).

Итак, работа консервативной силы определяется разностью потенциальной энергии тела в начальной и конечной точках пути. При элементарном перемещении работа равна минус изменению потенциальной энергии.

$$dA = \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = -dE_П.$$

Знак минус говорит о том, что работа совершается за счет убыли потенциальной энергии.

Работа консервативных сил на конечном участке пути 1 – 2:

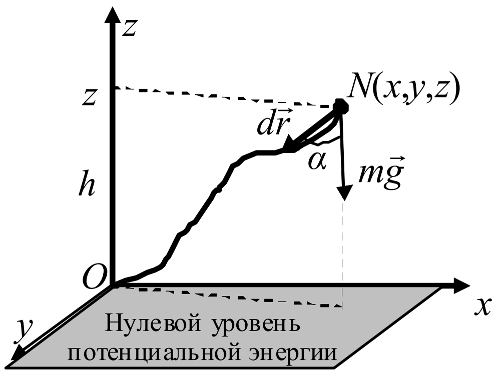
$$A_{12} = \int_1^2 \left(\vec{F} d\vec{r}\right) = -\left(E_{П2} - E_{П1}\right) = E_{П1} - E_{П2}. \qquad (28)$$

Потенциальная энергия – функция, которая определяется с точностью некоторой произвольной постоянной, определяющей нулевой уровень потенциальной энергии. Так как в формулу работы консервативной силы входит только разность значений $E_П$ в двух положениях частицы, то нулевой уровень отсчета энергии выбирают произвольно. То есть потенциальную энергию тела в каком-то определенном положении считают равной нулю. Энергию тела в других положениях отсчитывают относительно нулевого уровня. **Тело, находящееся в поле консервативных сил, обладает потенциальной энергией $E_П$ относительно нулевого уровня потенциальной энергии.**

Конкретный вид функции $E_П$ зависит от характера силового поля.

Для определения потенциальной энергии тела (материальной точки) в консервативном силовом поле, необходимо выбрать положение начала отсчета нулевого уровня потенциальной энергии и вычислить работу силы при перемещении по произвольной траектории в этом поле из данной точки поля в точку отсчета нулевого уровня потенциальной энергии.

Пример 1: потенциальная энергия тела массы m, поднятого на высоту h над поверхностью Земли.



Пусть материальная точка (тело) массой m находится в точке $N(x,y,z)$ однородного поля силы тяжести. В качестве начала отсчета потенциальной энергии выберем точку O начала декартовой системы координат. Плоскость xOy совместим с поверхностью Земли.

Потенциальная энергия материальной точки (тела) в точке N поля равна работе силы тяжести, совершаемой при перемещении тела из точки N с координатами x, y, z в точку O с координатами $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда элементарная работа равна: $\delta A = \left(m\vec{g} d\vec{r}\right) = mg\left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha = -mgdz$, где $dz = -\left|d\vec{r}\right| \cdot \cos\alpha$.

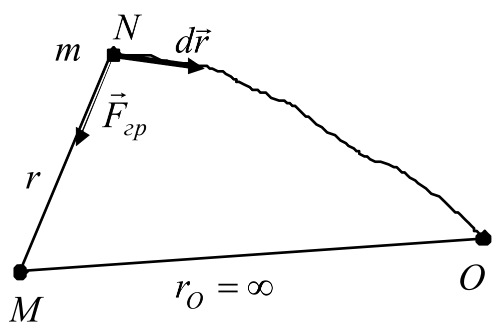
При перемещении тела из точки N в точку O работа силы тяжести равна: $A = -\int_z^0 mgdz = -mg(0 - z) = mgz = mgh$.

Работа силы тяжести при падении тела на Землю равна потенциальной энергии

$$E_П = mgh,$$

если за нуль принята потенциальная энергия тела, лежащего на Земле.

Пример 2: потенциальная энергия тела массой m, находящегося в точке N на расстоянии r от тела массой M. Тело массой M является источником гравитационного поля.

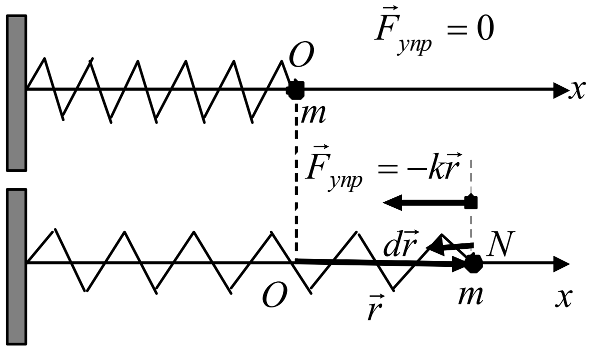


За начало отсчета потенциальной энергии выберем точку O (на бесконечно большом удалении $r_O = \infty$ от тела массой M). Потенциальная энергия материальной точки (тела) в точке N равна работе A_{NO} гравитационной силы, совершаемой при перемещении тела из точки N в точку O по произвольной траектории.

Вычислим работу гравитационной силы:

$$A = \int_N^O \delta A = \int_N^O (\vec{F}_{гр} d\vec{r}) = -\int_r^{r_O} \gamma \frac{Mm}{r^2} dr = \gamma Mm \cdot \left(\frac{1}{r_O} - \frac{1}{r}\right) = -\gamma \frac{Mm}{r}.$$

Как следует из полученного выражения, если начало отсчета потенциальной энергии – точка O – выбрано «в бесконечности» ($r_O = \infty$), то потенциальная энергия тела (материальной точки) во всех точках пространства вокруг тела массой M **отрицательна**.



Пример 3: потенциальная энергия упруго деформированной пружины.

Рассмотрим пружину, один конец которой закреплен, а другой может перемещаться горизонтально под действием внешней силы. Направим координатную ось

x параллельно оси пружины и выберем начало отсчета координаты x ($x_0 = 0$) в положении незакрепленного конца недеформированной пружины (точка О).

Когда пружина не деформирована, тело (материальная точка) массой m находится в точке с координатой $x = 0$. Примем точку O за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия материальной точки (тела массой m) в произвольном положении N с координатой x равна работе A_{NO} упругой силы, совершаемой при перемещении тела из точки N в точку O.

Вычислим работу упругой силы при перемещении тела из точки N в точку O: $A = \int_N^O (-k\vec{r}d\vec{r}) = -\int_x^{x_0=0} kxdx = \frac{k}{2}(x^2 - x_0^2) = \frac{kx^2}{2}$.

Как следует из полученного выражения, материальная точка, находящаяся на конце деформированной пружины обладает потенциальной энергией $E_П = \frac{1}{2}kx^2$, если за начало отсчета потенциальной энергии принять координату $x_0 = 0$ не деформированной пружины.

4.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИЕЙ И СИЛОЙ

Если материальная точка находится в консервативном силовом поле и известна зависимость действующей на материальную точку силы от координаты N (x,y,z) точки поля, то легко можно найти потенциальную энергию поля в этой точке: $E_П(x,y,z) = \int_N^O (\vec{F}d\vec{r})$, где интеграл вычисляется вдоль произвольной траектории между точкой N и точкой O, принятой за начало отсчета потенциальной энергии.

Потенциальная энергия тела является функцией от его координат:

$$E_П = E_П(x, y, z).$$

Зная вид этой функции, можно найти силу, действующую на тело. Установим связь между потенциальной энергией и силой.

Рассмотрим перемещение тела под действием силы $\vec{F}$. Разложим силу на три составляющие вдоль координатных осей и рассмотрим работу каждой составляющей силы:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z, \; d\vec{r} = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz.$$

Тогда $dA = (\vec{F}d\vec{r}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dE_П(x, y, z)$.

Чтобы определить компоненты вектора силы, поступим следующим образом. Пусть, совершая элементарное перемещение, материальная точка движется параллельно оси x (вектор $d\vec{r}$ параллелен оси x). В этом случае координаты y и z материальной точки остаются постоянными ($y = const$, $z = const$), значит $dy = dz = 0$. Тогда

$$F_x dx = -\left[dE_П(x, y, z)\right]_{y,z=const}.$$

Отсюда

$$F_x = -\left[\frac{dE_П(x, y, z)}{dx}\right]_{y,z=const} = -\frac{\partial E_П(x, y, z)}{\partial x}.$$

Здесь $\frac{\partial E_П}{\partial x}$ – частная производная функции $E_П$ (x, y, z), вычисленная в предположении, что переменные y и z остаются неизменными, а изменяется лишь величина x.

Итак $$F_x = -\frac{\partial E_П}{\partial x},\ F_y = -\frac{\partial E_П}{\partial y},\ F_z = -\frac{\partial E_П}{\partial z}.$$

Эти три формулы можно объединить в одну векторную формулу. С этой целью умножим их на единичные векторы координатных осей $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и сложим:

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

или

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, называют градиентом функции $E_П$ и обозначают $\overrightarrow{grad}E_П$: $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_П = -\nabla E_П$.

Градиентом скалярной функции $E_П(x,y,z)$ называется векторная функция, которая по определению равна: $\overrightarrow{grad}E_П = \frac{\partial E_П}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_П}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_П}{\partial z}\vec{k}$. Градиент представляет собой оператор, то есть правило, по которому всякой скалярной функции $E_П(x,y,z)$ ставится в соответствие векторная функция тех же переменных. **Градиент скалярной функции указывает направление наиболее быстрого возрастания функции.**

Сила равна градиенту потенциальной энергии, взятому с обратным знаком. Знак минус означает, что сила всегда направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии.

Эквипотенциальной поверхностью называется поверхность, во всех точках которой потенциальная энергия имеет одно и то же значение (поверхность постоянной потенциальной энергии). Уравнение эквипотенциальной поверхности можно записать: $E_П(x, y, z) = const$.

Пример 1: уравнение эквипотенциальной поверхности в однородном поле силы тяжести: $E_П(x, y, z) = mgz = const, \quad z = const$. Эквипотенциальная поверхность в однородном поле силы тяжести – горизонтальные плоскости $z = const$.

Пример 2: уравнение эквипотенциальной поверхности в гравитационном поле: $E_П(r) = -\gamma \dfrac{Mm}{r} = const, \quad r = const$. Эквипотенциальные поверхности в гравитационном поле – это сферические поверхности (сферы $r = const$).

Вектор силы, действующей на материальную точку, помещенную в потенциальное поле, всегда направлен перпендикулярно эквипотенциальной поверхности в сторону уменьшения потенциальной энергии.

Докажем это утверждение. Пусть материальная точка совершила бесконечно малое перемещение $d\vec{r}$ по эквипотенциальной поверхности. Так как во всех точках эквипотенциальной поверхности потенциальная энергия имеет одинаковое значение, то изменение потенциальной энергии $dE_П = 0$. Элементарная работа силы $\vec{F}$ равна: $\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = -dE_П = 0$. Отсюда следует, что скалярное произведение $(\vec{F} d\vec{r}) = 0$ или $\vec{F} \perp d\vec{r}$. Так как $d\vec{r}$ принадлежит эквипотенциальной поверхности, то вектор силы $\vec{F}$ всегда перпендикулярен эквипотенциальной поверхности.

4.5. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрим материальную точку (тело), которая находится в консервативном силовом поле, ее скорость $\vec{\upsilon}$, а потенциальная энергия задана функцией $E_П = E_П(x, y, z)$.

Полной механической энергией *E* материальной точки называется сумма ее кинетической и потенциальной $E_П$ энергии: $E = E_К + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П$.

Сформулируем закон сохранения полной механической энергии материальной точки.

Если на материальную точку (тело) действуют только консервативные силы, ее полная механическая энергия с течением времени не изменяется (сохраняется):

$$E = E_К + E_П = \frac{m\upsilon^2}{2} + E_П = const.$$

Доказательство этого утверждения основано на теореме о кинетической энергии и свойствах консервативных сил. Пусть материальная точка переместилась из произвольного начального положения 1 в произвольное конечное положение 2 (из точки 1 в точку 2 пространства). Согласно теореме о кинетической энергии работа $A_{1\text{-}2}$ сил поля равна приращению кинетической энергии материальной точки

$$A_{1-2} = E_{К2} - E_{К1},$$

где $E_{К2}$ и $E_{К1}$ – кинетическая энергия материальной точки в конечном и начальном положениях соответственно.

В процессе перемещения на материальную точку действуют только консервативные силы, работа которых равна убыли потенциальной энергии:

$$A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2},$$

где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия материальной частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

Так как $A_{1-2} = E_{К2} - E_{К1}$ и $A_{1-2} = E_{П1} - E_{П2}$, то

$$E_{К2} - E_{К1} = E_{П1} - E_{П2} \text{ или } E_{К2} + E_{П2} = E_{К1} + E_{П1},\ E_2 = E_1,$$

где E_2 и E_1 – полная механическая энергия материальной точки в конечном и начальном положении соответственно.

Это выражение означает, что полная механическая энергия материальной точки в начальном положении равна полной механической энергии в конечном положении. Поскольку начальное и конечное положения выбраны произвольно, то можно утверждать, что полная механическая энергия материальной точки в процессе движения не изменяется (сохраняется).

Таким образом, если материальная точка находится в силовом поле, в котором действуют только консервативные силы, то полная механическая энергия материальной точки не изменяется со вре-

менем $E = const$. Консервативные силы не могут изменить полную механическую энергию материальной точки в процессе движения.

Если на материальную точку, расположенную в консервативном силовом поле кроме консервативных сил действуют любые другие силы (не консервативные), то полная механическая энергия материальной точки изменяется со временем. Примером не консервативных сил в механике являются силы трения, силы сопротивления. Силы трения и силы сопротивления называют *диссипативными*, так как они приводят к диссипации энергии – превращение механической энергии в теплоту.

Закон изменения полной механической энергии материальной точки. **Работа диссипативных сил $A_{1\text{-}2дис}$ при перемещении материальной точки из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна приращению полной механической энергии материальной точки:**

$$A_{1-2дис} = E_2 - E_1,$$

где E_2 и E_1 – полная механическая энергия материальной точки в конечном и начальном положениях соответственно.

Докажем это утверждение. Согласно теореме о кинетической энергии, работа $A_{1\text{-}2}$ всех приложенных к материальной точке сил при ее перемещении из начального положения в конечное, равна приращению кинетической энергии материальной точки:

$$A_{1-2} = E_{K2} - E_{K1},$$

где E_{K2} и E_{K1} – кинетическая энергия материальной точки в конечном и начальном положениях соответственно.

Работа $A_{1\text{-}2}$ складывается из работы $A_{1\text{-}2конс}$ консервативных сил и работы $A_{1\text{-}2дис}$ диссипативных (не консервативных) сил:

$$A_{1\text{-}2} = A_{1\text{-}2конс} + A_{1\text{-}2дис}.$$

Однако работа $A_{1\text{-}2конс}$ консервативных сил равна убыли потенциальной энергии материальной точки:

$$A_{1-2конс} = E_{П1} - E_{П2},$$

где $E_{П1}$ и $E_{П2}$ – потенциальная энергия материальной частицы в начальном и конечном положениях соответственно.

То $A_{1\text{-}2} = E_{П1} - E_{П2} + A_{1\text{-}2дис}$, или $E_{К2} - E_{К1} = E_{П1} - E_{П2} + A_{1\text{-}2дис}$. Преобразуем выражение: $(E_{К2} + E_{П2}) - (E_{К1} + E_{П1}) = A_{1\text{-}2дис}$ или $A_{1\text{-}2дис} = E_2 - E_1$,

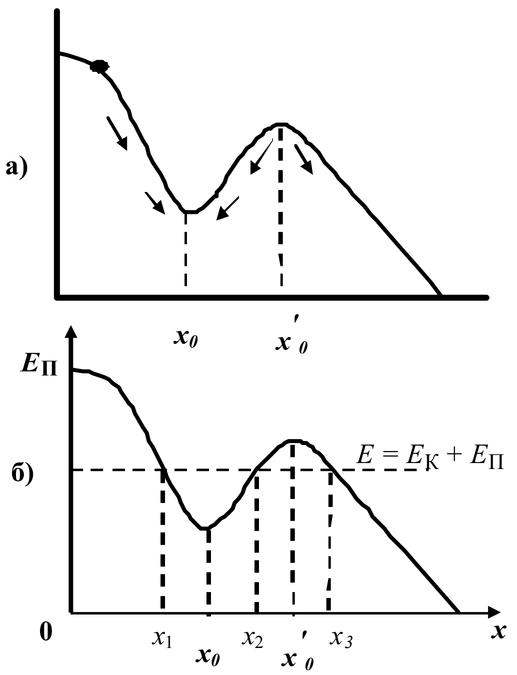
где E_2 и E_1 – полная механическая энергия материальной точки в конечном и начальном положении соответственно.

Работа неконсервативных (диссипативных) сил при перемещении материальной точки из произвольного начального положения в произвольное конечное положение равна изменению полной механической энергии материальной точки в этих положениях $A_{1\text{-}2дис} = E_2 - E_1 = \Delta E$.

Только неконсервативные силы могут изменить полную механическую энергию материальной точки.

4.6. ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ. УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим материальную точку, положение которой может быть определено с помощью одной величины, например, координаты x, т.е. потенциальная энергия точки является функцией $E_П = E_П(x)$.



Графическая зависимость потенциальной энергии от координаты x называется <u>потенциальной кривой</u>. Зная вид функции $E_П(x)$, можно сделать ряд заключений о характере движения частицы.

В качестве примера рассмотрим шарик, скользящий без трения по изогнутой в вертикальной плоскости проволоке. На шарик действует консервативная сила – сила тяжести. График потенциальной энергии $E_П(x)$ показан на рисунке. Проанализируем эту кривую. Полная энергия шарика E изображена на графике горизонтальной линией, поскольку имеет место закон сохранения энергии $E = E_K + E_П$.

Частица может находиться только там, где $E_П(x) \le E$, т.е. в областях от x_1 до x_2 или от x_3 до бесконечности. В области $x < x_1$ и $x_2 < x < x_3$ частица проникнуть не может, т.к. потенциальная энергия не может стать больше полной энергии. Таким образом, область $x_2 < x < x_3$ представляет собой <u>потенциальный барьер</u>, через который частица не может проникнуть при данном запасе полной энергии. Область $x_1 < x < x_2$ называется <u>потенциальной ямой.</u>

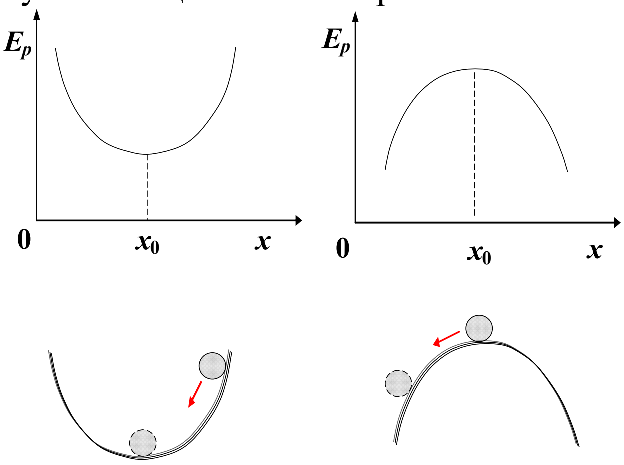
Минимуму потенциальной энергии соответствует на графике точка с координатой x_0. Условие минимума потенциальной энергии имеет вид $\frac{dE_П}{dx} = 0$.

Поскольку действующая на частицу сила

$$F_x = -\frac{dE_П}{dx},$$

то в точке x_0 $F_x = 0$. При смещении частицы из положения x_0 она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение x_0 является положением устойчивого равновесия. Итак, устойчивому равновесию соответствует минимум потенциальной энергии частицы. В точке x_0', соответствующей максимуму потенциальной энергии, выполняются эти же условия равновесия. Однако это равновесие будет неустойчивым: при смещении частицы из положения x_0' возникает сила, которая будет удалять его из положения равновесия.

Таким образом, неустойчивому равновесию соответствует максимум потенциальной энергии.



а) устойчивое равновесие

б) неустойчивое равновесие

В точке x_0: $\frac{dE_p}{dx} = 0 \Rightarrow F = 0 \Rightarrow$ тело в равновесии.

Тело находится в положении устойчивого равновесия, если потенциальная энергия тела минимальная.

Этот вывод распространяется и на систему тел.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как найти работу переменной силы?
2. Что называется мощностью? Выведите ее формулу.
3. Что называется кинетической энергией?
4. Дайте определение потенциальной энергии.
5. Чем объясняется изменение потенциальной энергии?
6. Какова связь между силой и потенциальной энергией?
7. Что такое потенциальная кривая? Поясните на примере, как по виду потенциальной кривой сделать заключение о характере движения тела.
8. Назовите условия устойчивого и неустойчивого равновесия.