Лекция 14

ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Термины и понятия

Вероятность
Внешнее воздействие на что?
Достоверный
Дискретный
Закон Максвелла
Микросостояние
Находиться в интервале
Невозможный
Непрерывный
Статистика
Статистический
Ось абсцисс
Ось ординат
Пространство скоростей
Равновозможный
Скоростная точка

14.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Физические величины, встречающиеся в молекулярной физике (давление, объём, температура, средний квадрат смещения частицы при броуновском движении и т.д.) имеют смысл средних значений, которые принимают при определенных условиях какие-то функции микросостояний системы. Про величины такого рода говорят, что они имеют статистический характер или являются статистическими величинами. Все эти величины подчиняются определенным закономерностям, не свойственным отдельным атомам и молекулам. Это связано с большим количеством частиц в системах. Такие закономерности, обусловленные большим количеством участвующих в их возникновении молекул, атомов, называются *статистическими* или *вероятностными закономерностями.* Статистические закономерности изучаются *теорией вероятности.* Приведем некоторые элементарные понятия теории вероятности, необходимые для дальнейшего изложения материала.

1. Событиями или случаями в теории вероятностей называют всякие явления, относительно которых имеет смысл ставить вопрос, могут они происходить или нет. Опыт или совокупность условий, в результате которых появляется то или иное событие, в теории вероятностей называется испытанием.

Если событие при данных условиях обязательно произойдет, то такое событие называется *достоверным.* Если событие произойти не может, то такое событие называется *невозможным.*

Событие называется *случайным*, если в результате испытания оно может произойти или не произойти.

2. Два случайных события называются равновозможными или равновероятными, если нет никаких оснований ожидать, что при испытаниях одно из них будет появляться чаще другого. Несколько событий называют равновозможными, если каждые два из них равновозможные события.

3. Вероятность случайного события – это количественная мера ожидаемой возможности его появления. *Вероятностью случайного события называется отношение числа равновозможных случаев его появления к числу всех испытаний.* Если всего испытаний N, а число равновозможных случаев появления случайного события dN, то вероятность случайного события $dp = \dfrac{dN}{N}$.

Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю.

Это понятие вероятности случайного события применительно к случаю, когда число равновозможных случаев появления случайного события из большого множества испытаний имеет конечное значение. Иначе говоря, величина, описывающая случайное событие может принимать ряд дискретных значений.

4. Если величина, описывающая случайное событие принимает непрерывный ряд значений, то необходимо рассматривать вероятность того, что значение этой величины заключено в некотором интервале или вероятность dp того, что значение величины, описывающей случайное событие, заключено в интервале от a до $a + da$. Вероятность такого события пропорциональна ширине бесконечно узкого интервала da и её можно представить в виде: $dp = \varphi(a)da$, причем коэффициент пропорциональности $\varphi(a)$ зависит от a. Функция $\varphi(a)$ называется плотностью вероятности.

5. Функция плотности вероятности случайного события $\varphi(a)$ должна удовлетворять следующему условию (условию нормировки): так как $dp = \dfrac{dN}{N}$, а $dp = \varphi(a)da$, то $dN = N\varphi(a)da$. Проинтегрируем это выражение по всем возможным значениям непрерывной величины $\int dN = \int_{-\infty}^{+\infty} N\varphi(a)da$; так как $\int dN = N$, то $N = N\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(a)da$ или $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(a)da = 1$ – это условие называется условием нормировки.

6. Основные теоремы теории вероятностей – теорема сложения вероятностей и теорема умножения вероятностей. Сформулируем эти теоремы без доказательства.

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы несовместимых событий равна сумме вероятностей этих событий. Пусть событие B является суммой событий A_1 и A_2, то есть состоит в появлении либо события A_1, либо события A_2 (безразлично какого), тогда вероятность появления события B равна сумме вероятностей появления события A_1 и вероятности появления события A_2: $P(B) = P(A_1) + P(A_2)$.

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий A_1 и A_2 равна произведению вероятностей одного события на вероятность другого события, если эти события независимые. Если вероятность каждого из двух событий A_1 и A_2 не зависит от того, произошло второе событие или не произошло, то такие события называются независимыми. Тогда $P(A \cdot B) = P(A_1) \cdot P(A_2)$.

7. Важным понятием в теории вероятностей является понятие среднего значения случайной величины (математического ожидания). Пусть величина a может принимать непрерывный ряд значений, тогда среднее значение величины $\langle a \rangle$ можно определить по формуле:

$$\langle a \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} a\varphi(a)da .$$

14.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

Молекулы любого газа находятся в вечном хаотическом движении. Скорости молекул могут принимать самые различные значения. Молекулы сталкиваются, в результате столкновений происходит изменение скоростей молекул. В каждый данный момент времени скорость каждой отдельной молекулы является случайной и по величине и по направлению.

Пусть газ состоит из N тождественных частиц, находящихся в беспорядочном хаотичном движении. При определенной температуре газ занимает объем V. Силовые поля отсутствуют.

Из опыта известно, что участвующие в хаотическом тепловом движении молекулы газа в равновесном состоянии при температуре T обладают различными скоростями. Встречаются медленные молекулы, скорости которых близки к нулю. Встречаются очень быстрые молекулы, скорости которых во много раз больше средней скорости теплового движения. Между этими двумя предельными случаями скорости молекул с различной вероятностью принимают всевозможные значения. Очевидно, имеет смысл выяснить, сколько молекул обладает скоростью, близкой к некоторому заданному значению. Чтобы ответить на этот вопрос, найдем закон распределения молекул по скоростям, который называется законом распределения Максвелла.

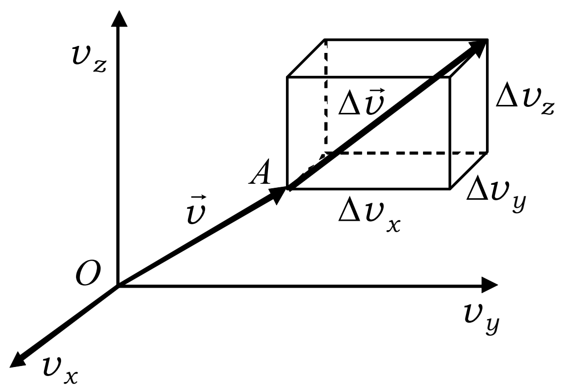
14.2.1. Распределение молекул по значениям проекции скорости на координатную ось

Сначала рассмотрим распределение молекул по значениям проекции скорости на координатную ось. Для удобства введем понятие трехмерного пространства скоростей.

Пусть газ состоит из N тождественных частиц, находящихся в беспорядочном хаотичном движении. В определенный момент времени определим скорости всех молекул $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3, \ldots . \vec{\upsilon}_N$. Примем произвольную точку O пространства за начало координат. Отложим от неё скорости всех молекул $\vec{\upsilon}_1, \vec{\upsilon}_2, \vec{\upsilon}_3, \ldots . \vec{\upsilon}_N$. Концы этих векторов называются «скоростными точками». Совокупность «скоростных точек» образует трехмерное пространство, которое называется **пространством скоростей**. Если с точкой O связать систему координат, то координатами «скоростной точки» в этом пространстве будут проекции υ_x, υ_y, υ_z вектора $\vec{\upsilon}$ на эти оси. Например: точке A соответствует молекула со скоростью $\vec{\upsilon}$. Координаты точки A, в координатном пространстве скоростей – это проекции вектора $\vec{\upsilon}$ на оси системы координат представляют собой υ_x, υ_y и υ_z.

Задание скоростей всех молекул газа эквивалентно заданию координат всех «скоростных точек» в пространстве скоростей. Каждая точка в этом пространстве соответствует молекуле с какой-то скоростью. Решение задачи о распределении скоростей молекул, таким образом, сводится к определению положения «скоростных точек» в пространстве скоростей в любой момент времени. Так как молекул много, то распределение молекул по скоростям следует рассматривать как статистическую задачу.

Возьмем в пространстве скоростей физически бесконечно малый объём ΔV. Среднее число молекул («скоростных точек»), попавших в этот объём в пространстве скоростей ΔN. Вследствие хаотичного движения молекул ΔN непрерывно меняется, но при установившемся равновесном состоянии газа среднее значение $\langle \Delta N \rangle$ остается постоянным и подчиняется определенным статистическим закономерностям. (В дальнейшем при выводе закона распределения молекул по скоростям под ΔN будем подразумевать среднее $\langle \Delta N \rangle$).



Число молекул («скоростных точек») в пространстве скоростей, попавших в объём $\Delta V = \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z$ пропорционально объёму ΔV, общему числу молекул и вероятности попадания их в этот объём: $\Delta N = Nf(\vec{\upsilon})\Delta V$. Вероятность того, что из N молекул ΔN попало в объём ΔV или вероятность того, что молекулы имеют скорость $\vec{\upsilon}$ в интервале от $\vec{\upsilon}$ до $\vec{\upsilon}+\Delta\vec{\upsilon}$ равна $\dfrac{\Delta N}{N} = f(\vec{\upsilon})\Delta V$. Если газ занимает объём V, то можно записать $\dfrac{\Delta N}{V} = \dfrac{N}{V} f(\vec{\upsilon})\Delta V \Rightarrow \Delta n = nf(\vec{\upsilon})\Delta V$,

где n – концентрация молекул в единице объёма, $f(\vec{\upsilon})$ – плотность вероятности распределения молекул в пространстве скоростей. Нахождение $f(\vec{\upsilon})$ – это и есть статистическая задача о распределении молекул по скоростям.

Функция $f(\vec{\upsilon})$ должна удовлетворять условию нормировки: $dN = Nf(\vec{\upsilon})dV$, $\int\limits_V dN = N$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{\upsilon})dV = 1$.

Функция распределения $f(\vec{\upsilon})$ меняется непрерывно и плавно с изменением скорости $\vec{\upsilon}$. Она описывает вероятное распределение молекул по скоростям.

Следует обратить внимание на то, что если $\Delta V \to 0$, то $\Delta N \to 0$. Таким образом, среднее число молекул со строго определенной скоростью $\vec{\upsilon}$ равно нулю.

По смыслу функции распределения $\Delta N = Nf(\vec{\upsilon})\Delta V = Nf(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z$ – это среднее количество молекул проекции скоростей, которых лежат в интервале υ_x и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, υ_y и $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$, υ_z и $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$. Функция распределения $f(\vec{\upsilon})$ определяет трехмерное (объёмное) распределение молекул в пространстве скоростей. Или

$$\Delta n = nf(\vec{\upsilon})\Delta V = nf(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z,$$

а $\dfrac{\Delta n}{n} = f(\vec{\upsilon})\Delta V = f(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$.

Выясним, какова вероятность того, что x – составляющая скорости молекулы лежит в интервале υ_x и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$. Ясно, что эта вероятность пропорциональна ширине рассматриваемого скоростного интервала $\Delta\upsilon_x$ и функции распределения молекул по проекции υ_x вектора скорости. Обозначим эту вероятность $\varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$, где $\varphi(\upsilon_x)$ – одномерная функция распределения. Она характеризует распределение молекул не по полной скорости $\vec{\upsilon}$, а только по её проекции υ_x на ось x. Число молекул Δn_x в единице объема, имеющих составляющую скорости υ_x в интервале υ_x и $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, будет прямо пропорционально общему числу молекул n и $\Delta\upsilon_x$: $\Delta n_x = \varphi(\upsilon_x) n \Delta\upsilon_x$, (14.1)

$\varphi(\upsilon_x) = \dfrac{\Delta n}{n\Delta\upsilon_x}$ – функция распределения показывает вероятность того, что проекция скорости молекул лежит в единичном интервале $\Delta\upsilon_x$ вблизи некоторого значения υ_x.

Запишем выражение (1) несколько иначе, а именно

$$\frac{\Delta n_x}{n} = \varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x. \qquad (14.2)$$

Отношение $\dfrac{\Delta n_x}{n_x}$ представляет собой вероятность того, что молекулы имеют составляющую скорости по оси x в интервале υ_x и $(\upsilon_x + \Delta\upsilon_x)$.

Ввиду полного равноправия всех направлений движения распределения молекул по значениям проекций скорости υ_x, υ_y, υ_z будут одинаковыми.

Вероятность того, что молекулы имеют составляющую скорости по оси y, лежащую в интервале υ_y и $(\upsilon_y + \Delta\upsilon_y)$, выражается формулой:

$$\frac{\Delta n_y}{n} = \varphi(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y,$$

а вероятность того, что молекула будет иметь составляющую скорости по оси z в интервале υ_z и $(\upsilon_z + \Delta\upsilon_z)$, выражается формулой:

$$\frac{\Delta n_z}{n} = \varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z.$$

Вероятность $\frac{\Delta n}{n}$ того, что молекулы имеют скорость, составляющие которой заключены в пределах от υ_x, υ_y, и υ_z до $\upsilon_x+\Delta\upsilon_x$, $\upsilon_y+\Delta\upsilon_y$, $\upsilon_z+\Delta\upsilon_z$,

равно произведению вероятностей $\frac{\Delta n_x}{n}$, $\frac{\Delta n_y}{n}$, $\frac{\Delta n_z}{n}$ (так в теории вероятности рассчитывается вероятность сложного события),

то есть $\frac{\Delta n}{n}=\frac{\Delta n_x}{n}\frac{\Delta n_y}{n}\frac{\Delta n_z}{n}$; или

$$\frac{\Delta n}{n}=\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z, \qquad (14.3)$$

однако $\frac{\Delta n}{n}=f(\vec{\upsilon})\Delta V=f(\upsilon_x,\upsilon_y,\upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$, это означает, что $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z=f(\vec{\upsilon})\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z$ или $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)=f(\vec{\upsilon})$.

Положительные и отрицательные направления движения молекул газа по любой координатной оси эквивалентны. Поэтому должно быть $\varphi(\upsilon_x)=\varphi(-\upsilon_x)$. Значит, функция φ может зависеть только от модуля или квадрата скорости υ_x, то есть $\varphi(\upsilon_x)=\varphi(\upsilon_x^2)$. Аналогично $\varphi(\upsilon_y)=\varphi(\upsilon_y^2)$, $\varphi(\upsilon_z)=\varphi(\upsilon_z^2)$. Точно также функция f может зависеть только от квадрата скорости $\vec{\upsilon}$ и не зависит от направления скорости, то есть $f(\vec{\upsilon})=f(\upsilon^2)$.

Чтобы выполнялось условие $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)=f(\vec{\upsilon})$ или $\varphi(\upsilon_x^2)\varphi(\upsilon_y^2)\varphi(\upsilon_z^2)=f(\upsilon^2)$, необходимо предположить, что $\varphi(\upsilon_x)=\varphi(\upsilon_x^2)=c\cdot e^{-\lambda\upsilon_x^2}$; $\varphi(\upsilon_y)=\varphi(\upsilon_y^2)=c\cdot e^{-\lambda\upsilon_y^2}$; $\varphi(\upsilon_z)=\varphi(\upsilon_z^2)=c\cdot e^{-\lambda\upsilon_z^2}$, тогда $f(\vec{\upsilon})=f(\upsilon^2)=f(\upsilon_x^2+\upsilon_y^2+\upsilon_z^2)=c^3\cdot e^{-\lambda\upsilon^2}$, где c и λ – коэффициенты, зависящие от параметров молекул, которые необходимо определить.

Вид функции $\varphi(\upsilon_x)=\varphi(\upsilon_x^2)$, а также $f(\vec{\upsilon})=f(\upsilon^2)$ можно найти путем несложных математических преобразований.

Так как молекулы движутся беспорядочно, хаотично, то отношение $\frac{\Delta n}{n}$ является постоянной величиной: $\frac{\Delta n}{n}=const$.

Значит, дифференциал от этой величины равен нулю: $d(\frac{\Delta n}{n})=0$.

Кроме того, если элементарный объем $\Delta\upsilon_x, \Delta\upsilon_y, \Delta\upsilon_z$ является постоянным, то

$$d(\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z)=0. \qquad (14.4)$$

Продифференцируем выражение (14.2):

$$d(\frac{\Delta n}{n})=d[\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)]\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z+$$

$$+\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)\times d[\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z]=0.$$

Второй член в этом выражении равен нулю, согласно (14.4).

Тогда $$d[\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)]\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z=0.$$

Так как элементарный объем $\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z \neq 0$, то

$$d[\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)]=0.$$

Дифференцируем

$$\varphi'(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)d\upsilon_x+\varphi(\upsilon_x)\varphi'(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)d\upsilon_y+\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi'(\upsilon_z)d\upsilon_z=0.$$

.

Разделим все члены этого выражения на $\varphi(\upsilon_x)\varphi(\upsilon_y)\varphi(\upsilon_z)$, получим

$$\frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon)_x}d\upsilon_x+\frac{\varphi'(\upsilon_y)}{\varphi(\upsilon_y)}d\upsilon_y+\frac{\varphi'(\upsilon_z)}{\varphi(\upsilon_z)}d\upsilon_z=0. \qquad (14.5)$$

Теперь вспомним, что

$$\upsilon^2=\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2 \qquad (14.6)$$

и что $\upsilon=const$ в том смысле, что скорость υ не меняется по отношению к изменению ее составляющих υ_x, υ_y, и υ_z.

Тогда, дифференцируя выражение (14.5), получим $\upsilon_x d\upsilon_x+\upsilon_y d\upsilon_y+\upsilon_z d\upsilon_z=0$.

Умножим последнее выражение на произвольную постоянную величину β и сложим с (14.5).

$$[\frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon_x)}+\beta\upsilon_x]d\upsilon_x+[\frac{\varphi'(\upsilon_y)}{\varphi(\upsilon_y)}+\beta\upsilon_y]d\upsilon_y+[\frac{\varphi'(\upsilon_z)}{\varphi(\upsilon_z)}+\beta\upsilon_z]d\upsilon_z=0.$$

Написанное выражение может выполняться только в том случае, если каждый его член равен нулю. Следовательно,

$$\frac{\varphi'(\upsilon_x)}{\varphi(\upsilon_x)}+\beta\upsilon_x=0, \qquad (7)$$

$$\frac{\varphi'(\upsilon_y)}{\varphi(\upsilon_y)}+\beta\upsilon_y=0, \qquad (8)$$

$$\frac{\varphi'(\upsilon_z)}{\varphi(\upsilon_z)}+\beta\upsilon_z=0. \tag{14.9}$$

Эти уравнения легко решаются. Решим уравнение (14.7). Обозначим для удобства $\varphi(\upsilon_x)=y$, тогда $\varphi'(\upsilon_x)=\dfrac{dy}{d\upsilon_x}$ и уравнение (14.7) перепишется в виде

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{d\upsilon_x}+\beta\upsilon_x=0 \text{ или}$$

$$\frac{dy}{y}=-\beta\upsilon_x d\upsilon_x\ , \quad \int\frac{dy}{y}=-\beta\int\upsilon_x d\upsilon_x,$$

$\ln y=-\dfrac{\beta\upsilon_x{}^2}{2}+c_1=-\lambda\upsilon_x^2+c_1$. Константу интегрирования c_1 можно взять в виде $c_1=\ln c$.

Тогда $\ln y=-\lambda\upsilon_x{}^2+\ln c$ и $y=ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}$.

Переходим к старым обозначениям и получим:

$$\frac{\Delta n_x}{n}=\varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x=ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}\Delta\upsilon_x\text{, значит } \varphi(\upsilon_x)=ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}.$$

Аналогично $\dfrac{\Delta n_y}{n}=\varphi(\upsilon_y)\Delta\upsilon_y=ce^{-\lambda\upsilon_y{}^2}\Delta\upsilon_y$ и $\varphi(\upsilon_y)=ce^{-\lambda\upsilon_y{}^2}$, а

$$\frac{\Delta n_z}{n}=\varphi(\upsilon_z)\Delta\upsilon_z=ce^{-\lambda\upsilon_z{}^2}\Delta\upsilon_z \text{ и } \varphi(\upsilon_z)=ce^{-\lambda\upsilon_z{}^2}.$$

Перемножим вероятности, получим:

$$\frac{\Delta n}{n}=f(\vec{\upsilon})\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z=c^3e^{-\lambda(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z \text{ или}$$

$$f(\vec{\upsilon})=c^3e^{-\lambda(\upsilon_x{}^2+\upsilon_y{}^2+\upsilon_z{}^2)}.$$

$$\frac{\Delta n}{n}=c^3e^{-\lambda\upsilon^2}\Delta\upsilon_x\Delta\upsilon_y\Delta\upsilon_z.$$

Найдем коэффициенты c и λ, входящие в уравнение функции распределения молекул по проекциям скорости на координатные оси.

1. Найдем c из условия нормировки.

Функция распределения молекул по проекции скорости на ось x $\varphi(\upsilon_x)=ce^{-\lambda\upsilon_x{}^2}$ должна быть нормирована, то есть должно выполняться условие нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(a)da=1$, или $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x=1$, тогда $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c\cdot e^{-\lambda\upsilon_x^2}d\upsilon_x=1$. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda\upsilon_x^2}d\upsilon_x=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, то $c=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$.

2. Найдем λ. Воспользуемся понятием **среднего** случайной величины (математического ожидания). Если величина a может принимать непрерывный ряд значений, тогда среднее значение величины $\langle a\rangle$ можно определить по формуле: $\langle a\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}a\varphi(a)da$.

Найдем среднее значение квадрата проекции скорости на ось x:

$\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}c\cdot e^{-\lambda\upsilon_x^2}\upsilon_x^2d\upsilon_x=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda\upsilon_x^2}\upsilon_x^2d\upsilon_x=\frac{1}{2\alpha}$, так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda\upsilon_x^2}\upsilon_x^2d\upsilon_x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$.

Определим среднее значение квадрата проекции скорости на ось x. Воспользуемся понятием средней кинетической энергии теплового движения молекул: $\langle E_к\rangle=\overline{E}_к=\frac{3}{2}kT$, с другой стороны $\langle E_к\rangle=\overline{E}_к=\frac{m_0\langle\upsilon\rangle^2}{2}=\frac{m_0\langle\upsilon_x\rangle^2}{2}+\frac{m_0\langle\upsilon_y\rangle^2}{2}+\frac{m_0\langle\upsilon_z\rangle^2}{2}$, учитывая, что $\langle\upsilon_x\rangle^2=\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle$, $\langle\upsilon_y\rangle^2=\left\langle\upsilon_y^2\right\rangle$, $\langle\upsilon_z\rangle^2=\left\langle\upsilon_z^2\right\rangle$ и что все направления движения молекул при хаотичном движении равновероятны, можно записать $\langle E_к\rangle=\overline{E}_к=3\frac{m_0\langle\upsilon_x\rangle^2}{2}=\frac{3}{2}kT$, отсюда можно найти $\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle=\frac{kT}{m_0}$.

Из сравнения формул $\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle=\frac{kT}{m_0}$ и $\left\langle\upsilon_x^2\right\rangle=\frac{1}{2\alpha}$ найдем α:

$\alpha=\frac{m_0}{2kT}$.

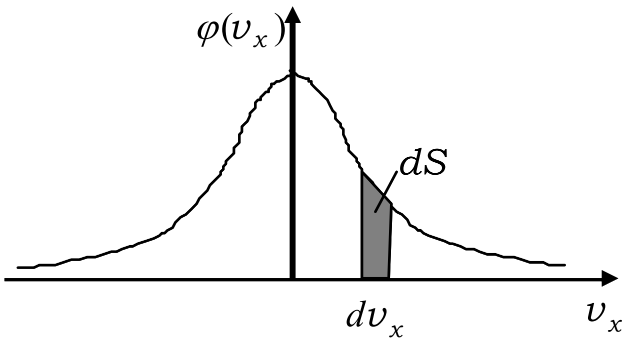
3. Так как $c=\sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$, а $\alpha=\frac{m_0}{2kT}$, то $c=\sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}}$.

Подставим полученные коэффициенты в выражения для функции распределения молекул по проекциям скорости и проанализируем полученное уравнение.

Функция распределения молекул по проекции скорости на ось x: $\varphi(\upsilon_x) = ce^{-\lambda\upsilon_x^2}$ или $\varphi(\upsilon_x) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} e^{-\frac{m_0\upsilon_x^2}{2kT}}$. Относительное число молекул, проекции скорости, которых лежат в интервале от υ_x до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$ (вероятность того, что проекции скорости молекул лежат в интервале от υ_x до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$) можно определить по формуле: $\frac{\Delta n_x}{n} = \varphi(\upsilon_x)\Delta\upsilon_x$. А число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от υ_x до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$, равна:

$$\Delta n_x = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} n e^{-\frac{m_0\upsilon_x^2}{2kT}} \Delta\upsilon_x .$$

График функции $\varphi(\upsilon_x)$ представлен на рисунке. Отметим некоторые свойства функции распределения.



1. Функция является четной, её график симметричен относительно оси ординат.

2. Площадь dS фигуры, ограниченной бесконечно малым интервалом оси абсцисс шириной $d\upsilon_x$, участком графика функции $\varphi(\upsilon_x)$, соответствующим этому интервалу, и отрезками параллельных оси ординат прямых, проведенных через граничные точки интервала $d\upsilon_x$, равна относительному числу молекул газа $\frac{dn_x}{n}$, значение проекций скорости, которых принадлежит интервалу (υ_x; $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$). Действительно, $dS = \varphi(\upsilon_x)d\upsilon_x = \frac{dn_x}{n}$.

3. Площадь части координатной плоскости, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $\varphi(\upsilon_x)$, равна единице, так как $S = \int dS = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\upsilon_x) d\upsilon_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dn_x}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

Распределение молекул равновесного газа по проекциям υ_y и υ_z будут описываться формулами, аналогичными распределению молекул по проекции υ_x: $\varphi(\upsilon_y) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} e^{-\frac{m_0 \upsilon_y^2}{2kT}}$;

$$\varphi(\upsilon_z) = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} e^{-\frac{m_0 \upsilon_z^2}{2kT}}.$$

Число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от υ_y до $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$, равна:

$$\Delta n_y = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} n e^{-\frac{m_0 \upsilon_y^2}{2kT}} \Delta\upsilon_y.$$

Число молекул в единице объёма газа, проекции скоростей которых лежат в интервале от υ_z до $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$, равна:

$$\Delta n_z = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{1/2} n e^{-\frac{m_0 \upsilon_z^2}{2kT}} \Delta\upsilon_z.$$

Число Δn молекул в единицу объема в газе, составляющие скоростей, которых одновременно лежат в интервале от υ_x до $\upsilon_x + \Delta\upsilon_x$; от υ_y до $\upsilon_y + \Delta\upsilon_y$; от υ_z до $\upsilon_z + \Delta\upsilon_z$ определяется формулой:

$$\Delta n = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} n e^{-\frac{m_0(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2)}{2kT}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z$$

или

$$\Delta n = (\frac{m_0}{2\pi kT})^{3/2} n e^{-\frac{E_к}{kT}} \Delta\upsilon_x \Delta\upsilon_y \Delta\upsilon_z.$$