

Лекция 10

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Термины и понятия

Весьма	Притяжение
Взаимосвязь	Релятивистская кинетическая энергия частицы
Возвести (в квадрат)	Релятивистский импульс
Гласить (закон гласит)	Сопровождаться чем?
Закон взаимосвязи массы и полной энергии тела	С учетом чего?
Закон сохранения релятивистского импульса	Увеличение (или вырастание)
Масса покоя	Упростить
Мера энергосодержания тела	Ускоритель
Недоступный	Чрезвычайно
Непосредственно	Эквивалентный
Полная энергия тела	Энергия покоя
Обусловлен, -а, -о, -ы чем?	Ядерный процесс
Оказываться (оказаться) чем? каким?	

10.1. ДИНАМИКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ОСНОВНОЙ ЗАКОН РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из принципа относительности следует, что математическая запись любого закона физики должна быть одинаковой во всех инерциальных системах отсчета. Это означает, что уравнения, описывающие какое-либо явление в системе отсчета K' , получаются из уравнений, описывающих это же явление в системе отсчета K . Это условие называется **условием ковариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца**. При использовании преобразований Лоренца происходит замена штрихованных величин (измеренных относительно системы K') на нештрихованные (измеренные относительно системы K).

Основной закон классической механики Ньютона для материальной точки $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ или $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$, в котором масса m этой точки и действующая на неё сила \vec{F} считаются одинаковыми во всех инерциальных

системах отсчета. Поэтому в классической механике масса – это коэффициент пропорциональности между силой и изменением скорости. Масса не зависит от скорости и инвариантна по отношению к выбору системы отсчета. Инертная масса не зависит от направления действия силы.

В классической механике принято, что импульс материальной точки пропорционален её массе и совпадает по направлению со скоростью \vec{v} этой точки: $\vec{P} = m\vec{v}$, поэтому $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ – основной закон динамики (2 закон Ньютона).

В релятивистской динамике импульс также как в классической динамике пропорционален массе и совпадает по направлению со скоростью \vec{v} этой точки. Однако, в отличие от классической механики импульс материальной точки не линейная функция от скорости:

$$\vec{P} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \text{ тогда основное уравнение релятивистской динамики:}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

В релятивистской механике масса $m(\vec{v})$ утрачивает смысл коэффициента пропорциональности между векторами \vec{a} и \vec{F} :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right); \text{ так как } \vec{p} = f(v, \vec{v}), \Rightarrow \text{ исследуем эту зависи-}$$

мость:

- Если $\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow v^2 = const$. Так как $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, $\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{a} \Rightarrow$ от-

сюда $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$

• Если $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow$, то $\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}} \vec{a} \Rightarrow$ отсюда $m = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3}}$.

В отличие от Ньютонской механики вектор силы \vec{F} в релятивистской механике не является инвариантом (в различных инерциальных системах отсчета \vec{F} имеет различные модули и направления).

Итак, основное уравнение релятивистской динамики:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \text{ где } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а m_0 – масса покоя частицы (в системе отсчёта, относительно которой частица находится в покое).

При малых скоростях ($v \ll c$) уравнение практически совпадает с уравнением механики Ньютона. Однако по мере увеличения скорости материальной точки её импульс возрастает быстрее, чем скорость. Очевидно, что $\lim_{v \rightarrow c} P = \infty$. Все реальные силы конечны по величине, а их

действие на тело ограничено по времени. Поэтому силы не могут сообщить телу бесконечно большой импульс. Следовательно, скорость тела по отношению к любой инерциальной системе отсчета не может быть равна скорости света в вакууме, а всегда меньше её.

10.2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Определим эту величину таким же путём, как и в ньютоновской механике. Было доказано, что приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном перемещении равно работе силы на этом перемещении:

$$dE_k = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt.$$

Согласно основному закону релятивистской динамики $\vec{F} dt = d(m\vec{v}) = dm \cdot \vec{v} + m d\vec{v}$,

где m – релятивистская масса. Поэтому

$$dE_k = dm(\vec{v} \cdot \vec{v}) + m(d\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2 dm + m \cdot v dv,$$

где учтено, что $\vec{v}d\vec{v} = vdv$ и $(\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2$. Эту формулу можно упростить. Для этого формулу зависимости массы от скорости возведём в квадрат и приведём её к виду: $m^2 c^2 = m^2 v^2 + m_0^2 c^2$.

Найдём дифференциал этого выражения, имея в виду, что m_0 и c – постоянные величины.

$$2 m c^2 dm = 2 m v^2 dm + 2 m^2 v dv.$$

Если теперь разделить это равенство на $2m$, то его правая часть совпадёт с выражением для dE_k . Отсюда следует

$$dE_k = c^2 dm = c^2 \cdot d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Таким образом, **приращение кинетической энергии частицы пропорционально приращению её релятивистской массы.**

Кинетическая энергия покоящейся частицы равна нулю, а её масса равна массе покоя m_0 . Поэтому, проинтегрировав последнее выражение, получаем

$$E_k = \int dE_k = \int_{m_0}^m c^2 dm = (m - m_0)c^2,$$

или

$$E_k = mc^2 - m_0c^2; \quad E_k = m_0c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

Это и есть выражение для релятивистской кинетической энергии частицы. Как видно, оно сильно отличается от ньютоновского $m_0 v^2/2$. Легко убедиться (пользуясь формулой бинома Ньютона), что при малых скоростях $v \ll c$, выражение для релятивистской кинетической энергии переходит в ньютоновское.

10.3. ЗАКОН ВЗАИМОСВЯЗИ МАССЫ И ЭНЕРГИИ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Из формулы приращения кинетической энергии частицы dE_k видно, что оно сопровождается пропорциональным приращением её релятивистской массы.

$$dE_k = c^2 dm = c^2 \cdot d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad \text{или} \quad E_k = mc^2 - m_0c^2,$$

где $E = mc^2$ – называют полной энергией тела, а $E_0 = m_0c^2$ – энергией покоя.

Эйнштейн пришёл к выводу, что масса тела будет вырастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и при увеличении общего запаса энергии (кинетической, электрической, тепловой, химической и т.д.). Полная энергия тела E связана с массой этого тела m соотношением

$$E = mc^2.$$

Формула полной энергии тела выражает один из наиболее фундаментальных законов природы – закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и полной энергии тела.

Это соотношение можно записать и в другой форме:

$$E = m_0c^2 + E_k,$$

где m_0 – масса покоя тела, E_k – его кинетическая энергия. Отсюда непосредственно следует, что покоящееся тело ($E_k = 0$) также обладает энергией.

$$E_0 = m_0c^2.$$

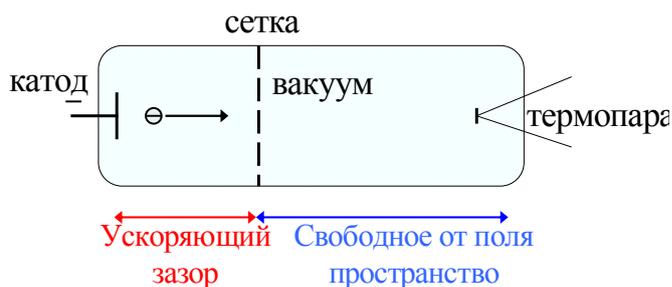
Эту энергию называют энергией покоя.

Мы видим, что масса тела, которая в классической механике выступала как мера инертности (во втором законе Ньютона) теперь выступает в новой функции – как мера энергосодержания тела. Даже покоящееся тело, согласно теории относительности, обладает запасом энергии – энергией покоя.

Изменение полной энергии тела сопровождается эквивалентным изменением его массы $\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2}$ и наоборот. При обычных макро-

скопических процессах изменение массы тела оказывается чрезвычайно малым, недоступным для измерений. Справедливость закона взаимосвязи массы и энергии экспериментально проверена в ядерной физике. Это обусловлено тем, что ядерные процессы и процессы превращения элементарных частиц сопровождаются весьма большими изменениями энергии, сравнимыми с энергией покоя самих частиц.

Опыт Бертоцци экспериментально доказывает, что нельзя ускорить электрон до скорости, превышающей c .

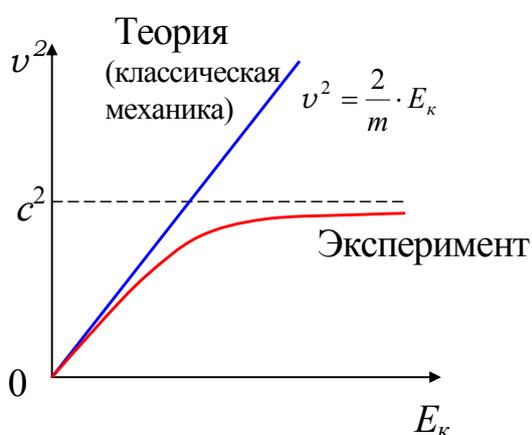


Термопара – для определения кинетической энергии, переходящей в тепло при ударе по ней электронов.

Классическая частица (по механике Ньютона):

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m} \cdot E_k \Rightarrow$$

зависимость – линейная.



Релятивистская частица (по релятивистской динамике):

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \text{релятивистский импульс.}$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \text{релятивистская масса}$$

(масса частицы в системе, относительно которой она движется).

$E_k = mc^2 - m_0c^2$ – кинетическая энергия.

СВЯЗЬ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Связь кинетической энергии и импульса в классической механике

Ньютона выражается формулой: $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$, при этом

$m = m_0 = const$. Если потенциальную энергию не учитываем, то полная энергия частицы равна её кинетической энергии, в этом случае

$$E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} = E.$$

Найдем связь полной энергии и импульса для тела, движущегося со скоростью, близкой к скорости света:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \quad \Rightarrow$$

Преобразуем выражение (избавимся от квадратного корня):

$$m^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4, \quad \underbrace{m^2 c^4}_{E^2} - \underbrace{m^2 v^2 c^2}_{p^2} = m_0^2 c^4 \quad \Rightarrow E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4.$$

Отсюда $E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad \Rightarrow E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}.$

СВЯЗЬ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ И ИМПУЛЬСА

Связь кинетической энергии и импульса в классической механике Ньютона выражается формулой: $E_k = \frac{p^2}{2m} = \frac{mv^2}{2}$, при этом $m = m_0 = const.$

Найдем связь кинетической энергии и импульса для тела, движущегося со скоростью, близкой к скорости света:

$$E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2, \text{ где } E_0 \text{ — энергия покоя.}$$

Так как полная энергия тела равна сумме энергии покоя и кинетической энергии, то:

$$E = E_0 + E_k \Rightarrow E^2 = E_0^2 + 2E_0 E_k + E_k^2.$$

Или

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 + 2E_0 E_k + E_k^2 - p^2 c^2 = E_0^2 \Rightarrow p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k (2E_0 + E_k)}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой вид имеет основной закон релятивистской динамики? Чем он отличается от основного закона ньютоновской механики?
2. В чем заключается закон сохранения релятивистского импульса?
3. Напишите выражение для кинетической энергии в теории относительности. При каком условии релятивистская формула для кинетической энергии переходит в классическую формулу?
4. Сформулируйте закон взаимосвязи массы и энергии.