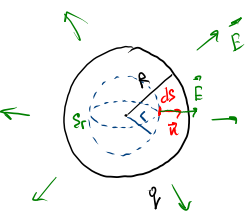


3} Объемно заряженный шар



Плотность шар равномерно заряжен с объемно: плот-тью

$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \text{const}$$

Введем малую сферу \$S_r\$ радиусом \$r\$ внутри шара

Полн \$\vec{E}\$ явл. центрально симметрична

т. радиус \$S_r\$: $\oint_{S_r} \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k q_r$ где \$q_r\$ - заряд внутри \$S_r\$

$$\oint_{S_r} \vec{E} d\vec{S} = \oint_{S_r} E_r \cdot d\vec{S} = E_r \cdot S_r = E_r \cdot 4\pi r^2$$

где: \$V_r\$ - объем шара, радиусом \$r\$

в шаре

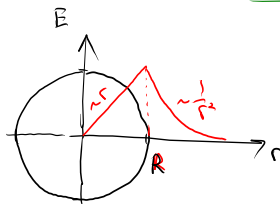
$$\rho = \frac{dQ}{dV} = \frac{q_r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \text{const} = \frac{\rho}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\Rightarrow q_r = \frac{r^3}{R^3} \cdot \rho$$

$$\Rightarrow \text{т. радиус: } E_r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k \cdot \frac{\rho}{R^3} \cdot r^3$$

$$\Rightarrow \left[E_r = \frac{k\rho}{R^3} \cdot r \right], \quad r \leq R \quad (\text{внутри шара})$$

Вне шара поле равносферн: $\left[E_r = \frac{kQ}{r^2} \right]; \quad r \geq R \quad (\text{вне шара})$

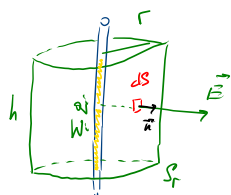


4} Поле равномерно заряженного \$\infty\$-линейного заряда (плотность заряда)

Плотность заряда \$\rho_l = \frac{dQ}{dl} = \text{const}\$

Поле \$\vec{E}\$ имеет радиальную симметрию: т.е. в \$\forall\$ точке оно \$\perp\$ осн. заряда (как в поле бесконечной нити)

т. радиус: $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = 4\pi k \sum q_i$



$$\Rightarrow \oint_{S_r} E_r \cdot d\vec{S} = E_r \cdot 2\pi r \cdot h$$

\$\sum q_i\$ эквивалентно к заряду нити и равен \$Q\$

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = 4\pi k \cdot \rho_l \cdot h$$

$$\Rightarrow \left[E_r = \frac{2k\rho_l}{r} \right], \quad \text{где } r \geq R \quad (\text{вне нити})$$

внутри заряда (\$r < R\$) \$\Rightarrow\$ заряд нити \$\Rightarrow \left[E_r = 0 \right]\$ - нити

$$E_r = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon_0} \rho_l, & \text{снаружи нити} \\ 0, & \text{внутри заряда} \end{cases}$$

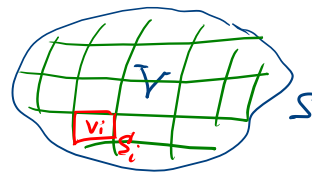
Теорема Гаусса в див. форме. Дивергенция.

- связывает объемн. плотн. заряда ρ и циркулянт $\vec{E}$ в окрестности точки наблюдения

т. Гаусса в интегр. ф. для непрерывн. распр. заряда

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = k \cdot \int_V \rho \, dv \quad \text{где } V - \text{объем, огранич.-н пов-ью } S$$

Разобьем V на клетки V_i , огранич. пов-ми S_i



$$\Rightarrow \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i \oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \sum_i V_i \cdot \frac{\oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{s}}{V_i}$$

или условим $V_i \rightarrow 0$
(а значит $S_i \rightarrow 0$)

$$\lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{s}}{V_i} \equiv \text{div } \vec{E}$$

т.е. дивергенция вектора $\vec{E}$ - есть поток, исходящий из (входящий в) бесконечно малый объем V_i , охватывающий некоторую точку наблюдения

divergentia - раз - расхождение

$$\Rightarrow \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i V_i \cdot \frac{\oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{s}}{V_i} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \sum_i V_i \cdot \text{div } \vec{E} = \int_V \text{div } \vec{E} \cdot dv$$

$$\text{т.е.} \quad \left| \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_V \text{div } \vec{E} \cdot dv \right| \quad \text{- теор. Остроградского - Гаусса}$$

$\Rightarrow$ т. Гаусса для непрерывн. распр. заряда

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = k \cdot \int_V \rho \, dv = \int_V \text{div } \vec{E} \cdot dv$$

где V - произвольн.

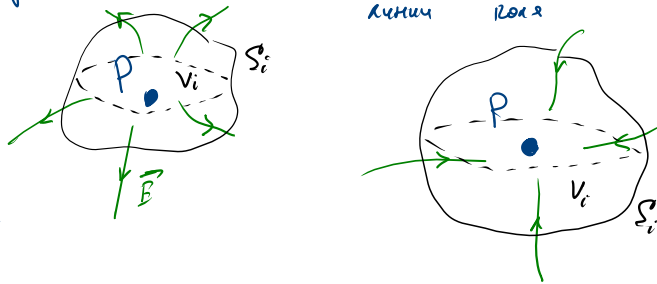
$$\Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{E} = k \cdot \rho} \quad \text{- т. Гаусса в диф. форме}$$

Дивергенция $\vec{E}$ в данной точке ...

Геометрическая Интерпретация (Дивергенция и Т. Гаусса в гур. форме)

Рассм-м точку P , в окрест-ти кот-й нах-т-ся м-бо оканчив-ся линии поля

Офф-цу $\tau \cdot P$ пов-то S_i



$$\text{div } \vec{E} \equiv \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{1}{V_i} \oint_{S_i} \vec{E} d\vec{S} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_E}{V_i}$$

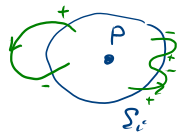
$$\text{Но! } \oint_{S_i} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_{S_i} E dS_{\perp} = \oint_{S_i} \underbrace{\delta}_{\text{плотность силовых линий } \vec{E}} dS_{\perp} = \Delta N_i$$

т.е. ΔN_i - кол-во линий направлен-ных $\vec{E}$, пересекающих пов-то S_i

$$\Rightarrow \left[\text{div } \vec{E} = \lim_{V_i \rightarrow 0} \frac{\Delta N_i}{V_i} \right]$$

$\Rightarrow$ Диверг-я $\vec{E}$ в точке P есть величина численно равная плотности точек,
в кот-х нах-т-ся м-бо оканчив-ся линии поля $\vec{E}$ (в окрест-ти точки P)

Плотность точек = кол-во точек приходящих на ед. объема



Т. Гаусса в гур. форме: $\text{div } \vec{E} = k \cdot \rho$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{V_i} \sim \frac{\Delta q}{V_i}$$

$$\Rightarrow \Delta N \sim \Delta q$$

$\Rightarrow$ точно зафера ед. несогласован линии $\vec{E}$

Точки на кот-х нах-т-ся $\vec{E}$ - "исходы"

заканчив-ся $\vec{E}$ - "споски"

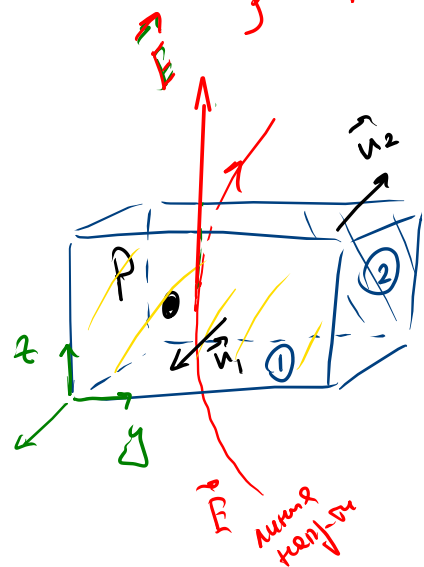
Точное рав-во:

$$\left[\begin{array}{l} \Delta N = k \cdot \rho \cdot \Delta q \\ \text{Ч.и! } \Delta N = \frac{\Delta q}{\epsilon_0} \end{array} \right] ?$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{\Delta q}{\Delta N} \Rightarrow \epsilon_0 \text{ численно равно кон-те } \text{зафера, приходящего на } 1 \text{ ну силовую линию!}$$

$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = k \cdot \rho \Leftrightarrow$ линии лине к-во зафера не нах-т-ся и не заканч-ся!

Впрах-я для розуміння в ДСК



Розглянемо S - елемент кубу з сторонами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

Потік $\vec{E}$ ч/з ① грані: $-E_{1x} \Delta y \Delta z$

це: E_{1x} - середнє значення $\vec{E}$ на грані ①.

Потік $\vec{E}$ ч/з ② грані: $E_{2x} \Delta y \Delta z$

це: E_{2x} - середнє значення $\vec{E}$ на ②

Сумарний потік ч/з ① та ② грані:

$$E_{2x} \Delta y \Delta z - E_{1x} \Delta y \Delta z = (E_{2x} - E_{1x}) \Delta y \Delta z =$$

$$= \int_{\text{об'єм}} \rho \, dV \Rightarrow E_{2x} = E_{1x} + \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Аналогічно н. потік потік $\vec{E}$ ч/з грані $\perp$ осі y : $\frac{\partial E_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_E}{V} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Інше вираження: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$ - оператор набір

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + \dots \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

§ Потенциальность Эл. Статичек. Поле.

Рассчитаем работу сил $\vec{F}$ на бесконечном участке $d\vec{\ell}$ вдоль произвольного траект. L между точками 1 и 2

Работа сил $\vec{F}$ на бесконечном участке $d\vec{\ell}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{F} = q_0 \vec{E} = q_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\ell} =$$

$$= \int \vec{E} = k \frac{q_0 q}{r^3} \vec{r} = k q_0 q \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{\ell}$$

$$\vec{r} \cdot d\vec{\ell} = |\vec{r}| \cdot |d\vec{\ell}| \cdot \cos \alpha = |\vec{r}| \cdot |d\vec{r}| = r \cdot dr$$

$$\Rightarrow dA = k \frac{q_0 q}{r^3} \cdot r \cdot dr = k \frac{q_0 q}{r^2} dr$$

$\Rightarrow$ Полная работа по траект. L :

$$\Delta A = \int_L dA = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{k q_0 q}{r^2} dr = k q_0 q \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{k q_0 q}{r_1} - \frac{k q_0 q}{r_2}$$

- не зависит от вида траект. L

$\Rightarrow$ поле эл. статического - консервативно

$$\Rightarrow \text{в таком поле: } \Delta A = -\Delta W_n = \underline{W_{n1}} - \underline{W_{n2}}$$

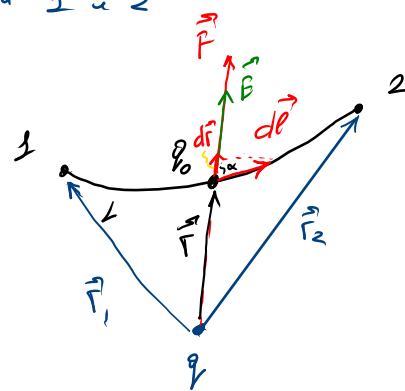
$\Rightarrow$ Потенц. эл. ст. в эл. ст. точеч. зарядов:

$$W_n = \frac{k q_0 q}{r} + \text{const}$$

const выбирается так, чтобы $r \rightarrow \infty$ $W_n \rightarrow 0 \Rightarrow \text{const} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{W_n = \frac{k q_0 q}{r}} \quad ? \quad \text{Потенц. эл. ст. в эл. ст. зарядов } q = q_0$$

$$\text{Сл: } W_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r} \quad \left| \quad r - \text{расст. эл. ст. зарядов}$$



$$|d\vec{\ell}| \cos \alpha = |d\vec{r}|$$

- направление модуля вектора $\vec{r}$