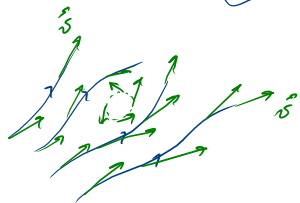


Гидродинамическая Аналогия

Опис-я св-в век. поля $\rightarrow$ вектор. анализ $\rightarrow$ у опис-я св-в св-в
Текущей жидк-ти

Текущая жид-ть изображ-ся векторным полем скор-сти

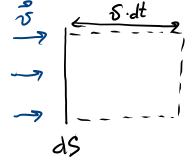
$$\text{Векторное поле} = \text{Текущая жидкость} - \text{Гидродинам. аналогия}$$



жидк-ть несжимаемая и идеальная

Пусть есть равномерное течение идеальной несжимаемой жидкости, характеризуется полем вектора скор-сти $\vec{v}$

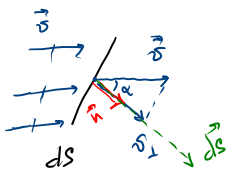
Пусть есть элемент. площад-и dS , $\perp$ течению



$\Rightarrow$ кол-во (объем) жидкости, пересекает dS за dt

$$dV = v dt \cdot dS$$

Если площадь dS раскл-на под α к $\vec{v}$, то тогда поток жидкости через dS $\perp$ площадке



$$dV = v_{\perp} \cdot dS \cdot dt = \underbrace{v \cdot \cos \alpha}_{\text{проекция скорости}} \cdot dS \cdot dt = (\vec{v}, \vec{n}) \cdot dS \cdot dt$$

$$\text{т.е. } (\vec{v}, \vec{n}) = \frac{\text{проекция скорости}}{\cos \alpha} = v \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$dV = (\vec{v}, d\vec{S}) dt = (\vec{v}, \vec{n} dS) dt$$

$$\text{т.е. } d\vec{S} = dS \cdot \vec{n} - \text{вектор элемента площадки}$$

$\Rightarrow$ кол-во (объем) жидкости, пересекает dS за dt

$$d\Phi_S \equiv \frac{dV}{dt} = (\vec{v}, d\vec{S})$$

(элементарный)

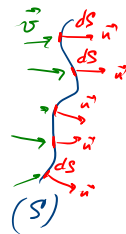
- поток вектора скор-сти $\vec{v}$ через элемент. площад-и $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$

$$\boxed{d\Phi_S \equiv \vec{v} \cdot d\vec{S}} \quad ?$$

Если конт-р имеет сложную форму

$\Rightarrow$ поток $\vec{v}$ по конт-ру

$$\Phi_S = \int_{(S)} d\Phi_S = \int_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S}$$



- поток вектора скор-сти

$\vec{v}$ по конт-ру S

§ Поток вектора напряек-ств. Теорема Гаусса.

Поток вектора напряек-ств. $\vec{E}$ через поверхность S равен сумме напряек-ств. $\vec{E}$ на S .

Оп: Поток вектора напряек-ств. $\vec{E}$ через поверхность S равен сумме напряек-ств. $\vec{E}$ на S .

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cos \alpha \, dS = E_{\parallel} dS = E_{\parallel} dS_{\parallel}$$

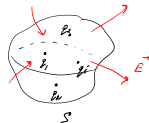
где: $dS_{\parallel}$ - проекция dS на направление $\vec{E}$

Поток вект. напряек-ств. $\vec{E}$ через поверхность S равен:

$$\Phi_E = \int_S d\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

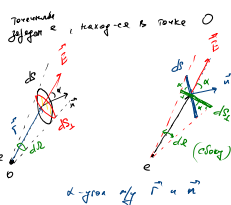


Теор. Гаусса
Поток вектора напряек-ств. равен...



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \sum_{i=1}^N q_i$$

Для-во
Поток вектора напряек-ств. $\vec{E}$ через поверхность S равен...



$$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \vec{r}$$

Поток вектора напряек-ств. $\vec{E}$ через поверхность S равен:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = k \frac{q}{r^2} \vec{r} \cdot d\vec{S} = k \frac{q}{r^2} r \cos \alpha \, dS = k \frac{q}{r} \cos \alpha \, dS$$

где: $\cos \alpha \, dS = \pm dS_{\parallel}$

где: $d\Phi_E = \pm k \frac{q}{r^2} dS_{\parallel}$ где: $dS_{\parallel}$ - проекция dS на направление $\vec{E}$

Определим: $\frac{dS_{\parallel}}{r^2}$ и найдем его значение для сферы

$$d\Omega = \frac{dS_{\parallel}}{r^2}$$

где: $d\Omega$ - элемент телесного угла

Если q находится внутри сферы, то:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \pm \oint_S k \frac{q}{r^2} dS_{\parallel} = \pm k q \oint_S d\Omega = \pm k q 4\pi$$

Если q находится вне сферы, то:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} + \int_{S_2} = -kq \Omega_1 + kq \Omega_2 = 0$$

То есть:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k q$$

где: q - суммарный заряд внутри поверхности S

Если q находится вне сферы, то:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$$

где: $\oint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$ - так как q_i находится вне сферы

Определим: $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \sum_i q_i$ - универсальная формула (П)

Если q находится внутри сферы, то:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \sum_i q_i$$

где: $\sum_i q_i$ - суммарный заряд внутри поверхности S

Теор. Гаусса для непрерывного распределения зарядов

1) Вычисление поля с помощью Тез. Гаусса

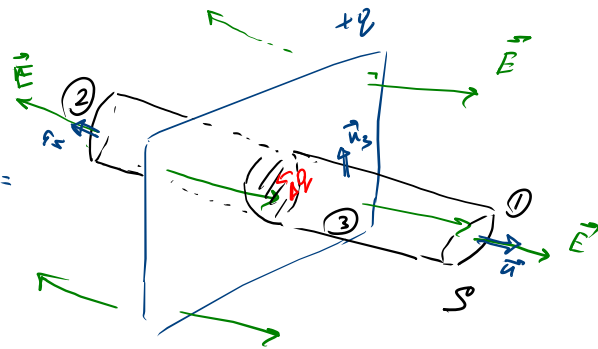
1) Поле равномерно заряж-го ∞ плоск-ти

q - поверхност. заряд-ность: $\sigma = \frac{dq}{dS} = \text{const}$

Видеть знаки. поле - симметрично

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} = E \cdot S_1 + E \cdot S_2 + E \cdot S_3 \cdot \cos \alpha =$$

$$= \int_{S_1 + S_2} = 2ES$$



выбрать цилиндр так, чтобы заряд

$$q = \int_S dq = \int_S \sigma \cdot dS = \sigma \cdot S$$

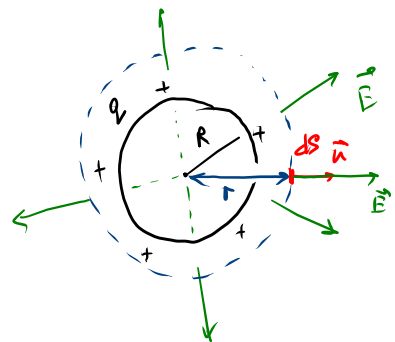
$\Rightarrow$ Тез. Гаусса: $2ES = \sigma S \cdot 4\pi k$

$$\Rightarrow \boxed{E = 2\pi k \sigma}$$

или: $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$

$\Rightarrow$ поле заряж. пл-ти всюду однородно

2) Радиально заряж. сфера



$\vec{E}$ - радиально симметрично $\Rightarrow$ по ради-м неэф-н рас-ся во все стороны

$$\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS \cdot \cos 0$$

Тез. Гаусса для сферы радиуса r : $\oint_{S_r} E_r \cdot dS = E_r \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k Q$

$$\Rightarrow E_r = \frac{kQ}{r^2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{вне} \\ \text{сферы} \end{array} \right)$$

Внутри сферы:

$$E_r \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E_r = 0}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{внутри} \end{array} \right)$$

Зарядов нет $\Rightarrow q=0$

