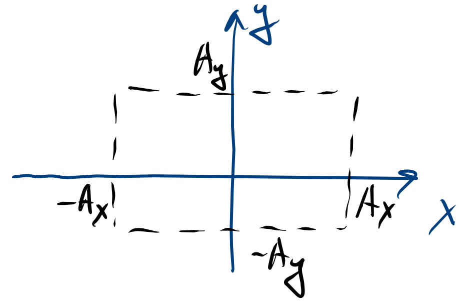
$x(t) = A_x \cdot \cos \omega_x t$

$y(t) = A_y \cdot \cos(\omega_y t + \varphi_0)$



2) $\omega_x \neq \omega_y$ (частоты не совпадают)

⇒ траект-я результ. кол-я сложная

⇒ траект-я не замкнута

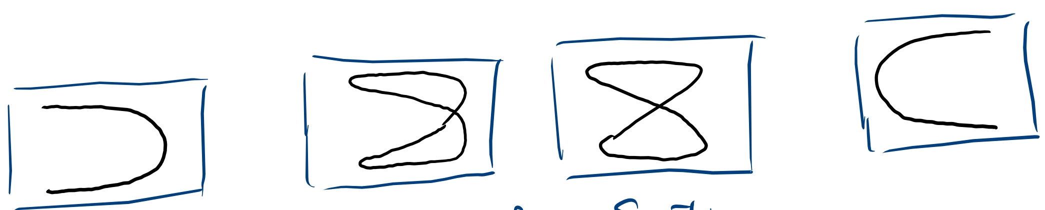
Замкнутая траект. будет, если соотнош-е частот — целые или дробные числа

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1, 2, 3, \dots$ $\quad \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots$

такие замкнутые траект-и — <u>фигуры Лиссажу</u>

ω_y / ω_x

1:2

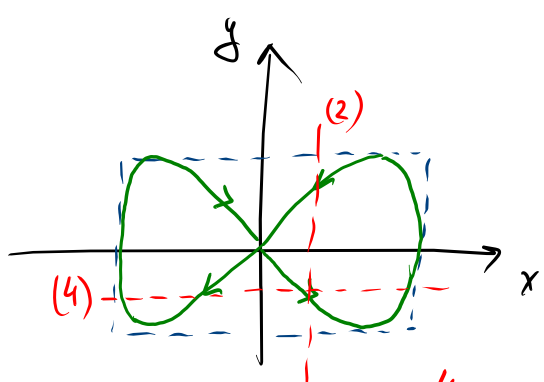


для замкнутой кривой д. быть:

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}$ где: n_y - число пересеч-й кривой с осью y

n_x – число пересеч-й с осью x

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$



$n_x = 4$

$n_y = 2$

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Затухающие колебания

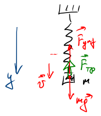
– возник-т в системе за счёт действия диссипат-х сил.

Найдём вид Дифф. Ур-я затух-х кол-й.

Пружинный маятник, движ-ся в некоторой среде

– тело, массой m, колеблющееся под дейст-м упругой силы $F_{уп} = -k \cdot x$ в среде с силой трения $F_{тр} = -r \cdot v$

где: r – коэф-т сопротивл-я среды



II з-Н в проекц. на y:

$$m \cdot a = \cancel{mg} - r \cdot v - k \cdot (\cancel{\Delta l} + y)$$

$a = \frac{d^2y}{dy^2}$ $\quad v = \frac{dy}{dt}$

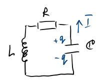
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y = 0 \quad !$$

В полож-е равнов-я

$$k \cdot \Delta l = m \cdot g$$

где: Δl – удлинение пружины от свободного сост-я

Затухающие колебания в колебат. контуре



з. Ома: $\mathcal{E}_S = U_C + U_R$

в катушке:

$$\mathcal{E}_S = -L \frac{dI}{dt}$$

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + I R$$

$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$-L \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{q}{C} + R \cdot \frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0 \quad !$$

Общий вид ДУ затухающих кол-й для величины $S = \{y, q, \ldots\}$

$$(*) \qquad \boxed{\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 \cdot S = 0} \quad !$$

где: β – коэф-т затухания; ω_0 – частота собственных (свободных) колеб-й

Решение (*) ищут в виде: $S(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

подставив $S(t)$ в (*) $\Rightarrow$ $A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$ $\quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$\Rightarrow$ Общее реш-е (*):

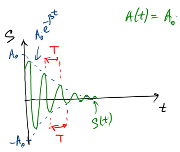
$$\boxed{S(t) = A_0 e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)} \quad ! \text{ – общ. реш-е ДУ затух. колеб-й}$$

где: A_0, φ_0 – постоянные, кот. находятся из нач-х условий

A_0 – начальн. амплитуда $\quad \varphi_0$ – нач. фаза

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затух-х колеб-й

$A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ – амплитуда затух. кол-й



Видно, что:

а) β определяет крутизну спада амплитуды

б) При слабом затухании (β – мал) м. использ-т понятие периода колеб-й, как промежуток времени м/у $2^{ми}$ максим-ми (или $2^{ми}$ миним.)

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}} \quad !$$

Параметры, характериз-е затух-е колеб-я.

1) Время релаксации (τ) – промеж. времени в течен. кот-го амплитуда колеб-й уменьш. в e-раз

$$\frac{A(t)}{e} = A(t + \tau) \Rightarrow \frac{\cancel{A_0} \cdot \cancel{e^{-\beta t}}}{e} = \cancel{A_0} \cdot e^{-\beta(\cancel{t} + \tau)} \Rightarrow \beta \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$

если $\beta \to \infty \Rightarrow \tau \to 0 \Rightarrow$ быстрозатухающие колеб-я

$\beta \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty \Rightarrow$ колеб-я бесконечны ($\approx$ гармон. кол-я)

2) Логарифмический декремент затух-я $\quad \underline{\Theta}$ или λ

$$\Theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{\cancel{A_0} \cancel{e^{-\beta t}}}{\cancel{A_0} e^{-\beta(\cancel{t} + T)}} = \ln \frac{1}{e^{-\beta T}} = \beta \cdot T$$

$$\Rightarrow \Theta = \beta \cdot T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\left(\frac{\tau}{T}\right)} = \frac{1}{N_e}$$

где: N_e – число колеб-й, соверш-х системой за время уменьш-я амплитуды в e-раз

3) Полная энергия зат. кол-й

для слабого затухания: $\beta \ll \omega_0$

$$E = E_к + E_п \approx \frac{m \omega_0^2 A^2(t)}{2} = \frac{m \cdot \omega_0^2 A_0^2 \cdot e^{-2\beta t}}{2} = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

$$\boxed{E = E_0 \cdot e^{-2\beta t}}$$

где: $E_0 = \frac{m \cdot \omega_0^2 \cdot A_0^2}{2}$ – нач. энергия затух-х колеб-й

4) Добротность (Q)

– отнош-е эн-и, запасённой в системе в данный t к убыли этой энерг. з/з период

$$Q \equiv 2\pi \frac{E(t)}{(-\Delta E)}$$

т.к. $E(t) = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$

$$\frac{dE}{dt} = -E_0 \cdot 2\beta \cdot e^{-2\beta t} \Rightarrow \underline{dE} = -2\beta E_0 \cdot e^{-2\beta t} \cdot \underline{dt}$$

пусть (предполагаю): $dt = \Delta t = T$ $\Rightarrow$ $dE = \Delta E$ – измен-е эн-и сист. за период T

$$\Rightarrow \Delta E = -2\beta E_0 \cdot e^{-2\beta t} \cdot T$$

$$\Rightarrow Q = 2\pi \cdot \frac{\cancel{E_0} \cancel{e^{-2\beta t}}}{-(-2\beta \cancel{E_0} T \cdot \cancel{e^{-2\beta t}})} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\Theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi}{\Theta}} \quad !$$

Добротность определ-ся логар. декрем-м затух-я. !

∫ Вынужденные колеб-я. Резонанс.

- возник-т под действием периодической вынуждающей силы

Пусть вынужд-я сила действ-т по гармон. закону: $F_{вын} = F_0 \cdot \cos \Omega t$

где: Ω – частота вынуждающей силы

F_0 – амплит. вын. силы

Найдем вид ДУ вынужд-х кол-й

Пружин. маятник

– колебл-ся под действ-м $F_{вын}$ в среде

$a = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\upsilon_x = \frac{dx}{dt}$

II з.Н.: $ma = F_{упр} + F_{тр} + F_{вын} = -k\cdot x - r\cdot\upsilon_x + F_0 \cdot \cos \Omega t$

$$ma + k\cdot x + r\cdot\upsilon_x = F_0 \cdot \cos \Omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\beta}\frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\cdot x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0}\cdot\cos \Omega t$$

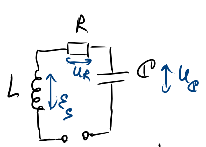
?

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2\cdot x = f_0 \cdot \cos \Omega t}$$

ДУ вынужд. кол-й

Вынужд. колеб. в колеб. контуре

- роль вынужд-й силы играет внешн. напр-е



$U = U_0 \cos \Omega t$

$I = \frac{dq}{dt}$

З. Ома: $IR + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_s + U(t)$

$$IR + \frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} + U_0 \cos \Omega t$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\beta}\cdot\frac{dq}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}q = \underbrace{\frac{U_0}{L}}_{f_0}\cdot\cos \Omega t$$

$$\boxed{\ddot{q} + 2\beta\cdot\dot{q} + \omega_0^2\cdot q = f_0 \cdot \cos \Omega t}$$

Итак общ. вид ДУ. затух. кол-й для $s = \{x, q, ...\}$

$$\boxed{\frac{d^2s}{dt^2} + 2\beta\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f_0\cdot\cos \Omega t} \qquad (*)$$

Из математики (*) – лин., неоднор. ДУ с постоян. коэф-ми

его реш-е: $s(t) = s_{однор}(t) + s_{неодн}(t)$

Однород. ур-е – это ДУ затух. кол-й $\Rightarrow$ $s_{одн}(t) = A_0 e^{-\beta t}\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$

Частн. реш-е неоднород. ур-я: $s_{неодн}(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}\cdot\cos(\Omega t - \varphi_\Omega) = A(\Omega)\cdot\cos(\Omega t - \varphi_\Omega)$

где: $A(\Omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$

$\operatorname{tg}\varphi_\Omega = \frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2-\Omega^2}$

см. [1]: Савельев И.В. т.1 Мех-ка ∫ Вынужд. кол-я с. 301