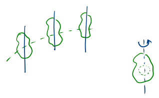
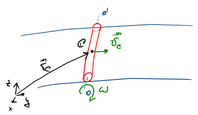
Гл. Механика Тв. Тела

Тв. Тело – ...

Движ. Тв. Тела:

а) Поступательное
б) Чисто вращат.-е





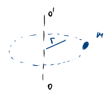
Остановимся на чисто вращат. движ.-и

§ Момент Инерции Тв. Тела

Пусть мат. точка m, вращ.-ся вокруг оси по радиусу r

Момент инерции мат. точки

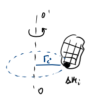
$I = m \cdot r^2$



Пусть Тв. Тело вращ.-ся вокруг оси OO'

Разобьем тело на „кусочки" с массами Δm_i
настолько малые $\simeq$ мат. точки

Δm_i движется по окруж.-ти
с радиусом r_i



Момент Инерц. Тв. Тела = Сумме момент. Инерц. мат. точек („кусочков")
из кот. состоит тело

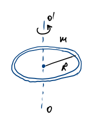
$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

где: I_i – момент инерц. i-ой матер. точки

Пусть Тв. Тело – тонкий обруч, массой m и радиусом R

$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i$$

$\Rightarrow$ $I = mR^2$



Если масса тела непрерывно распределена по объёму

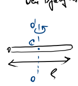
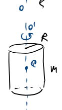
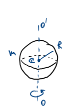
$$\sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 \rightarrow \int dm \cdot r^2$$

$$I = \int_V r^2 dm$$

– момент инерц. Тв. Тела при непрерывн. распред.-и массы по объёму

где: r – расст.-е от элементарной массы dm до оси вращ.-я

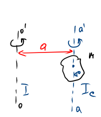
Моменты Инерции Тел

Тв. Тело	Полож. оси вращ.-я	Момент Инерции
Тонкий стержень длины ℓ		$I_c = \frac{1}{12} m \cdot \ell^2$
Сплошной цилиндр		$I_c = \frac{1}{2} \cdot m R^2$
Шар, радиусом R		$I_c = \frac{2}{5} m R^2$

Если ось вращ.-я произв.-на и не проходит ч/з С-масс
$\Rightarrow$ исп.-т Теор. Гюйгенса - Штейнера

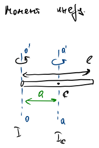
$$I = I_c + m \cdot a^2$$

„момент инерции относит.-но ...



$I_{OO'} = I_{aa'} + m \cdot a^2$

\# Момент инерц. тонкого длин. стержня длиной ℓ и массой m,
вращающ. относит. оси, проход.-й ч/з левый конец стержня



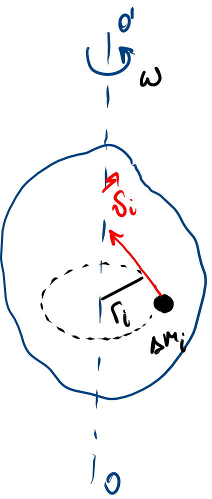
$I_c = \frac{1}{12} m \ell^2$ $\quad a = \ell/2$

$I = I_c + m a^2$

$\Rightarrow$ $I = \frac{1}{12} m \ell^2 + m \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m \ell^2 + \frac{m \ell^2}{4} = \frac{m \ell^2}{3}$

$\Rightarrow$ $I = \frac{m\ell^2}{3}$?

§ Кинет. Эн-я Вращат. Движ. Тв. Тела.



Разобью тело на „кусочки" с Δm_i

⇒ Кин. Эн. Тв. Тела = Сумме кин. эн. мат. точек („кусочков"), составл-х тв. тело

$$E_k = \sum_i E_{k_i} = \sum_i \frac{\Delta m_i \cdot v_i^2}{2}$$

Но! $v_i = \omega \cdot r_i$

$$\Rightarrow E_k = \sum_i \frac{\Delta m_i (\omega \cdot r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_i \Delta m_i r_i^2}_{I} = \frac{\omega^2 \cdot I}{2}$$

где: I – момент. ин. тв. тела относит. оси OO'

⇒ Кин. Эн. чисто Вращат. Движ-я

$$E_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$!

Если Тв.Тело учас-т в поступат. и вращат. движ-и

$$\boxed{E_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \cdot \omega^2}{2} = E_k^{(поступ)} + E_k^{(вращ.)}}$$!

где: m – масса тела

v_c – скорость точк центра масс тела

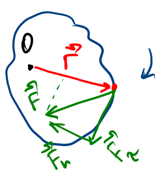
I_c – момент инерц.) вокруг относит. оси, проход-й ч/з Ц

§ Момент Силы

Пусть тв. тело вращ-ся вокруг неподвиж. оси O

Пусть на тело действ-т сила $\vec{F}$ ⊥ оси вращ-я

$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$



Действие $\vec{F}_n$ проходит ч/з ось вращ-я ⇒ на само вращ-е не оказывает действие

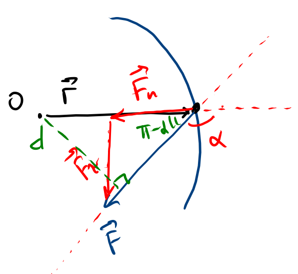
⇒ к вращ-ю тв. тела б. приводить только $\vec{F}_\tau$

Для характер-ки способн. вращать тело: вводят M – момент силы

$$M = F_\tau \cdot r$$

где: F_τ – тангенц. проекц. силы $\vec{F}$

r – расст-е от оси вращ-я до точки приложе. силы $\vec{F}$



$$M = F_\tau \cdot r = F \cdot \sin(\pi-\alpha) \cdot r = \left[\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \right] = F \cdot \sin\alpha \cdot r$$

$d = r \cdot \sin(\pi-\alpha) = r \cdot \sin\alpha$ – плечо силы

– кратчайшее расст-е от оси вращ-я до прямой, вдоль кот-й действует сила $\vec{F}$

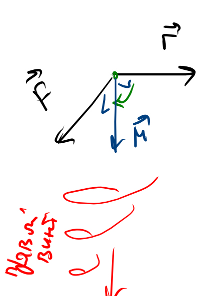
⇒ $M = F_\tau \cdot r = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d$

момент силы = Сила × Плечо

Вектор Момента Силы

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$ где: $\vec{r}$ – вектор, провед-й от оси вращ-я до точки приложе. силы

– связан с $\vec{r}, \vec{F}$ по правилу правого винта



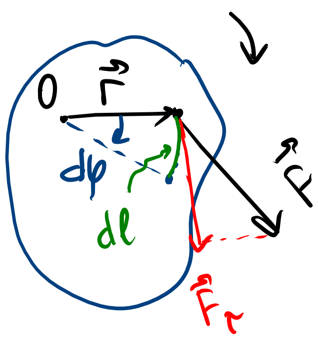
$M = r \cdot F \cdot \sin\alpha$

α – угол м/у $\vec{r}$ и $\vec{F}$

если $\alpha = 0$ ⇒ $M = 0$

§ Работа внешней силы при вращ. тв. тела

Пусть тело начин. вращ-ся под действ-м $\vec{F}$, вокруг оси О



Элемент. работа $\vec{F}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_\tau \cdot dl$$

где: dl – длина дуги окружности на кот. смещ-ся точка прилож. силы

$$dl = r \cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow dA = F_\tau \cdot r \cdot d\varphi = \left[d\varphi = \omega \cdot dt \right] = \underbrace{F_\tau \cdot r}_{M} \cdot \omega \cdot dt \Rightarrow$$

$$dA = M \cdot \omega \cdot dt = M \cdot d\varphi$$

$\Rightarrow$ Работа при конечном повороте тела

$$A = \int dA = \int M \cdot d\varphi = \int M \cdot \omega \cdot dt$$

Для $M = const$ $\Rightarrow$ $\boxed{A = M \cdot \Delta\varphi = M \cdot (\varphi_2 - \varphi_1)}$

где: $\Delta\varphi$ – угол на кот. е повернется тело