$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i$$

$$\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \vec{v}_c = \frac{\vec{p}}{m} \Rightarrow \underline{\vec{p} = m \cdot \vec{v}_c}$$ – импульс всей системы мат. точек

$$\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}_c}{dt}$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\text{вн}} \qquad \vec{a}_c$$

$$\Rightarrow \sum_i \vec{F}_i^{\text{вн}} = m \cdot \vec{a}_c$$

где: $\sum_i \vec{F}_i^{\text{вн}} \equiv \vec{F}_R^{\text{вн}}$ – сумма всех внешних сил, действ-х на тело

$\vec{a}_c = \frac{d\vec{v}_c}{dt}$ – ускор-е точки C

$$\Rightarrow \boxed{m \cdot \vec{a}_c = \vec{F}_R^{\text{вн}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{вн}}}$$ – ур. движения точки центра масс системы

$\Rightarrow$ Гипотеза о $\exists$ особой точки – C – верна $\Rightarrow$ повед-е всей системы мат. точек м. заменить повед-м C-точки (точки центра масс)

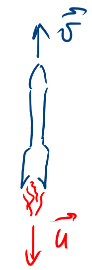
$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

!

§ Ур-е движ-я тела переменной массы

- движ-я тела за счёт непрерывного отделения (присоедин-я) вещ-ва

Движение ракеты



Пусть в момент t масса ракеты m, а её скорость $\vec{v}$

Пусть за время dt масса ракеты уменьш-ся на dm и станет равной $m - dm$;

При этом ск-ть ракеты станет равной $\vec{v} + d\vec{v}$

$\Rightarrow$ Изменение имп-са системы (ракета + газ) за время dt:

$$d\vec{p} = \left[(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + dm(\vec{v}+d\vec{v}+\vec{u})\right] - m\cdot\vec{v}$$

$\vec{u}$ - скорость истечения газов относит-но ракеты

$\Rightarrow$ $d\vec{p} = m\cdot d\vec{v} + \vec{u}\cdot dm$

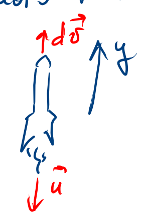
если на ракету дейст-т внешняя сила $\vec{F}$ $\Rightarrow$ $d\vec{p} = \vec{F}\cdot dt$

$\Rightarrow$ $\vec{F}dt = m\cdot d\vec{v} + \vec{u}\cdot dm$

$\Rightarrow$ $\boxed{m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\cdot\frac{dm}{dt}}$ - ур. движ-я тела с переменной массой (ур. Мещерского)

где: $-\vec{u}\frac{dm}{dt} = \vec{F}_р$ - реактивная сила (т.е. сила, действ-я на ракету за счёт газов)

Ск-ть ракеты (в вакууме) в завис-ти от сгоревшего топлива



Вакуум (вне земли, космос) $\vec{F} = 0$ $\Rightarrow$ $m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{u}\cdot\frac{dm}{dt}$

спроецир. на y: $m\frac{dv}{\cancel{dt}} = u\frac{dm}{\cancel{dt}}$

$\Rightarrow$ $dv = u\cdot\frac{dm}{m}$ $\Rightarrow$ $v = u\cdot\ln m + C$

Постоян-ю C м. найти из нач усл-я: $v=0 \Rightarrow m = m_0$

$\Rightarrow$ $0 = u\cdot\ln m_0 + C$ $\Rightarrow$ $C = -u\ln m_0$

$\Rightarrow$ $\boxed{v = u\cdot\ln\frac{m}{m_0}}$?

- форм. Циолковского

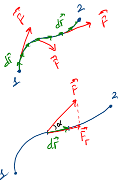
где: $m = m(t)$
u - ск-ть истечения газов
m_0 - начальная масса
$v = v(t)$ - ск-ть ракеты к моменту t

Глава. Закон Сохр.-я Энергии

§ Работа Силы. Мощность

Пусть частица соверш-т перемещ-е под действ-м $\vec{F}$ по траек-и м/у 1 - 2

$\vec{F}$ м. меняться по величине и по направл-ю



Разобьем всю траек. на небольш. участки в пределах кот-х $\vec{F} = \overrightarrow{const}$

под действ-м $\vec{F}$ частица перемещ-ся на вектор-перемещ-я $d\vec{r}$

Скалярн. вел-на:

$$\boxed{dA \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

наз. элемент-ой работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$

$dA \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_r \cdot dr$

где: α - угол м/у $\vec{F}$ и $d\vec{r}$

$F_r = F \cos\alpha$ - проекция $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$

$dr = |d\vec{r}|$

далее: $dr = dS$ - элементарный путь

$\Rightarrow dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_r \cdot dr = F_S \cdot dS$

где: F_S - проекция силы $\vec{F}$ на элементарный путь dS

в ДСК: $\vec{F} = F_x \cdot \hat{i} + F_y \cdot \hat{j} + F_z \cdot \hat{k}$ $\Rightarrow dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz$

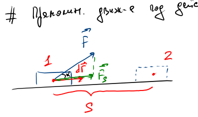
$d\vec{r} = dx \cdot \hat{i} + dy \cdot \hat{j} + dz \cdot \hat{k}$

где: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ - един. орты декарт. осей

Работой, соверш-й силой $\vec{F}$ на конечном перемещ-и м/у т. 1 и т. 2, наз. сумма элемент-х работ на малых участках траек-и

$$A \equiv \Delta A \equiv \sum_i dA_i \equiv \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 F_S \cdot dS$$

Прямолин. движ-е под действ-м постоянной силы $(\vec{F} = \overrightarrow{const})$.



$$A = \int_1^2 F_S \cdot dS = F_S \cdot \int_1^2 dS = F_S \cdot S = F \cdot \cos\alpha \cdot S$$

$$A = F \cdot S \cdot \cos\alpha$$

Отметим: $\cos\alpha > 0 \Rightarrow A > 0$

$\cos\alpha < 0 \Rightarrow A < 0$

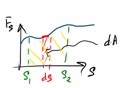
$\alpha = 90^\circ \Rightarrow A = 0$

(сила, действ-я $\perp$ перемещ-ю тела работы над телом не совершает)

$[A] =$ Дж - работа, соверш-я силой в 1 Н на пути в 1 м

«Джоуль»

Графически: A - есть площадь под кривой $F(S)$



$$A = \int_{S_1}^{S_2} F_S \, dS$$

Мощность - работа, соверш-я за ед. времени

если A, соверш-ю силой $\vec{F}$ за интервал Δt

$\Rightarrow$ средняя мощ-ть:

$$N_{ср} \equiv \frac{A}{\Delta t}$$

Мгновенная мощность:

$$N \equiv \frac{dA}{dt}$$

Пусть в t за интервал dt сила $\vec{F}$ совершила работу: $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

$$\Rightarrow N \equiv \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$\vec{v}$

$$\Rightarrow \boxed{N = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

$[N] =$ Вт «Ватт»

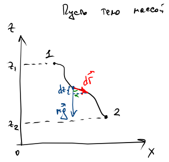
Если известна N $\Rightarrow$ $N = \frac{dA}{dt}$ $\Rightarrow$ $dA = N \cdot dt$

$$\Rightarrow \boxed{A = \int_1^2 dA = \int_{t_1}^{t_2} N \cdot dt}$$

где: t_1 и t_2 моменты времени, в кот-е частица находся в т. 1 и т. 2 траектории

Работа силы Тяжести

Пусть тело массой m перемещ-ся произв-но из т. 1 в т 2, и на тело действ-т сила тяжести



$dA = m\vec{g} \cdot d\vec{r} = mg \cdot dr \cdot \cos\alpha$

$dr \cdot \cos\alpha = -dz$

где: dz - приращение высоты

$$\Rightarrow A = \int_1^2 dA = -\int_{z_1}^{z_2} mg \cdot dz = -mg(z_2 - z_1) = mg(z_1 - z_2)$$

$$A = mg \cdot (z_1 - z_2)$$

- не зависит от вида траектории, а определ-ся только нач-м и конечным полож-м точки.