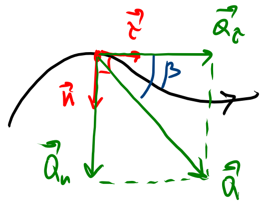
$$\vec a = \vec a_\tau + \vec a_n = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec\tau + \frac{\upsilon^2}{R}\cdot\vec n$$



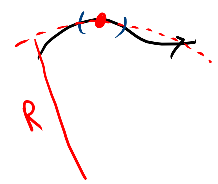
$\vec n \perp \vec\tau$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}$$

$\vec\tau$ – ед. вектор, касат-й к траект-и

$\vec n$ – ед. вектор, нормальный к $\vec\tau$

R – радиус кривизны траект-и, т.е. радиус окр-ти, кот. сливается с траект-ей на бо-малом её участке



$\frac{1}{R} = C$ – кривизна траект-и

Направление $\vec a$ задает угол β:

$$tg\,\beta = \frac{a_n}{a_\tau}$$

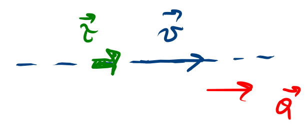
Случаи движ-я

1) Прямолинейное движ-е (т.е. вдоль прямой)

Прямая – окруж-ть ∞ радиуса

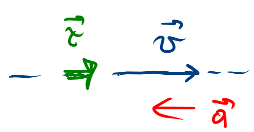
$\Rightarrow R \to \infty \Rightarrow a_n \to 0 \Rightarrow \vec a = \vec a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}\cdot\vec\tau$ $\quad \vec\upsilon = \upsilon\cdot\vec\tau \Rightarrow a = \frac{d\upsilon}{dt} = \dot\upsilon$

$\dot\upsilon > 0 \Rightarrow \vec a \uparrow\uparrow \vec\tau \Rightarrow \vec a \uparrow\uparrow \vec\upsilon$



равноускорен. движ-е (если $a = const$)

$\dot\upsilon < 0 \Rightarrow \vec a \uparrow\downarrow \vec\tau \Rightarrow \vec a \uparrow\downarrow \vec\upsilon$

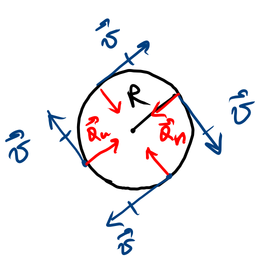


равнозамедлен. движ-е (если $a = const$)

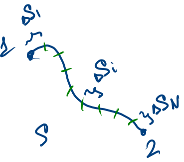
2) Равномерное движ-е с постоян-м по модулю ускор-м

«равномерное» $\Rightarrow \upsilon = const \Rightarrow \vec a_\tau = 0$

$\Rightarrow |\vec a| = |a_n| = \left|\frac{\upsilon^2}{R}\right| = const \Rightarrow R = const$ $\Rightarrow$ частица движ-ся по кривой постоянной кривизны т.е. по окруж-ти



§ Вычисление пройденного пути



Пусть мат. точка двигаясь из 1 в 2 и прошла путь S.
Как найти S?

Если участок прямолин-й и точка движ-ся с $v = const$, то путь ΔS за время Δt: $\Delta S = v \cdot \Delta t$

Разобьём весь путь S на небольш. участ-ки, что на $\forall$ участке $v_i = const$

$\Rightarrow S \simeq \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i$, но для $\Delta S_i = v_i \cdot \Delta t_i$ где: Δt_i – время прохожд-я уч-ка ΔS_i

$\Rightarrow S \simeq \sum_{i=1}^{N} v_i \Delta t_i$

Точное выраж-е для пути: $S = \lim\limits_{\substack{\Delta t_i \to 0 \\ (N \to \infty)}} \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \cdot dt$

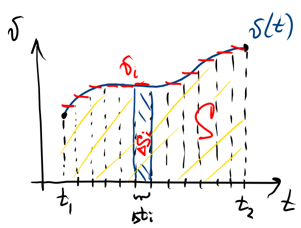
где: t_1 и t_2 – моменты времени, когда частица наход-сь в т. 1 и т. 2

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \phi(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \phi(t_2) - \phi(t_1)$$

первообразная: $v(t) = \frac{d\phi}{dt}$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

Геометрическая интерпретация



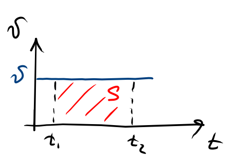
$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 1, N$

$\Delta S_i = v_i \cdot \Delta t_i$

$S \simeq \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i$

$\Rightarrow$ путь S – есть площадь под кривой, ограничен-й сверху $v(t)$ и моментами t_1 и t_2

Равномерное Движ-е



$v = const$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt = v \cdot (t_2 - t_1)$$

Равнопеременное (прямолинейное) Движ-е (т.е. с $a = const$)

$a = \frac{dv}{dt} = const \Rightarrow dv = a \cdot dt \Rightarrow v = a \cdot (t - t_1) + v_1$ $\quad v_1$ – нач. ск-ть

$$\Rightarrow S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(v_1 + a(t - t_1)\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} v_1\,dt + a\int_{t_1}^{t_2} (t - t_1)\,dt = v_1 (t_2 - t_1) + \frac{a \cdot (t - t_1)^2}{2}\Big|_{t_1}^{t_2} =$$

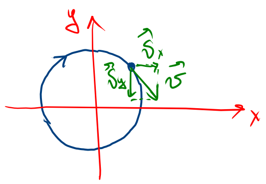
$$= v_1 (t_2 - t_1) + \frac{a \cdot (t_2 - t_1)^2}{2}$$

$$\boxed{S = v_1 (t_2 - t_1) + \frac{a \cdot (t_2 - t_1)^2}{2}}$$ для $a = const$

§ Кинематика Вращат. Движ-я

Вращ. Дв. – точка движ-ся по окр-ти с а) $v = const$ б) $v \neq const$

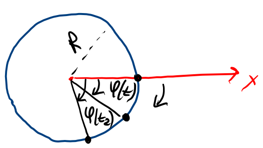
Пусть Мат. Точка движ. с $\underline{v = const}$ по окруж-ти радиуса R.



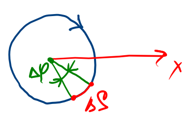
Для описания движ-я
$x(t)$, $y(t)$
$v_x(t)$, $v_y(t)$ $\Big\}$ ⇒ это 2 dim (двумерное движ-е)

Перейду к коорд-м, в кот-х движ-е б. одномерным (1 dim)

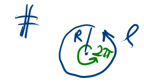
⇒ Полярные коорд-ты
– радиус окр-ти R
– угол поворота $\varphi(t)$, отложен-й от оси X



Пусть за малое время Δt тело повернулось на малый угол $\Delta\varphi$



$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$$



$\ell = 2\pi \cdot R$

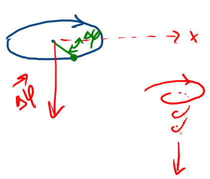
$$\Rightarrow v = \frac{dS}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \equiv R \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

где: $\frac{d\varphi}{dt} \equiv \omega$ – „угловая скорость" – характериз-т скорость изменения угла поворота

$\Rightarrow \boxed{v = R \cdot \omega}$ (*) !

v – „линейная ск-ть"

Пространственно:



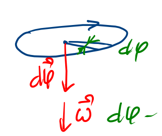
Если угол поворота $\Delta\varphi$ мал, то удобно вводят вектор $\Delta\vec{\varphi}$ – „вектор углового перемещ-я"
– длина $|\Delta\vec{\varphi}|$ равна углу $\Delta\varphi$
– направл-е $\Delta\vec{\varphi}$ связано с движ. точки по правилу „прав. винта"

$\Delta\vec{\varphi}$ – псевдовектор

⇒ Вводят Вектор Угловой ск-ти:

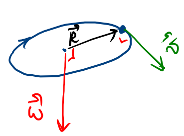
$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$$

$\vec{\omega} = \Bigg\{$ направлен по оси, вокруг которой вращ-ся тело, в сторону определ-ю правилом прав. винта
$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$



$d\varphi$ – бесконечно малый угол поворота

Пусть $\vec{R}$ – вектор, провед-й из центра окр-ти к матер. точке
⇒ (*) м. записать в вект. виде:



$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}]$$

$$v = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{R}| \cdot \underbrace{\sin 90}_{1} = \omega \cdot R$$