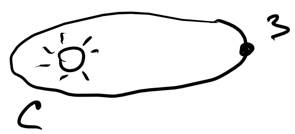
§ Механик. Движение. Механ. Система.
Матер. Точка. Система Отсчёта.

Механ. Движ-е → простейшая → измен-е полож. тел (их частей) др. относит. др.

Механ. Система – совок. тел, выделен. для изучения

Движущиеся тела → м. иметь разные размеры – для характ-ки их общего св-ва – движ-е – вводят понятие Матер. Точка

Движ. Земли вокруг Солнца



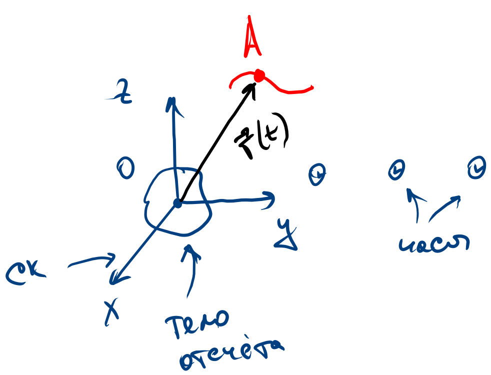
+ Движ. Тела в простр-ве и во времени

Ньютон: „Абс. пр-во – ... вместилище вещей, остающееся одинаковым ..."

„Абс. время (истинное, математическое) – текущее равномерно, безотносит.-но к внешнему"

Характ-ть полож. М.Т. в абсолют. пустом пр-ве невозможно

Система Отсчёта = {Совок-ть тел неподвиж-х (или тела отсчёта)} + Система координат + {Часы, помещён. в разные точки Сист. Коорд и синхрониз-х м/у собой}



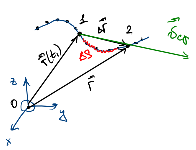
$\vec r(t)$ – радиус вектор

в ДСК:

$$\vec r = x\cdot\hat i + y\cdot\hat j + z\cdot\hat k \equiv (x, y, z)$$

⇒ Задать хар-р движ-я М.Т. ⇔ задать $\vec r(t)$ в какой-то системе отсчёта.

§ Скорость произвольно движущ-ся мат. точки



— траектория

Пусть в т. 1 мат. точка наход-сь в t_1

$\Rightarrow \vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$

в $t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow$ мат. точка нах-сь в $\vec{r}(t_2) \equiv \vec{r}_2$

$\Delta\vec{r}$ – вектор перемещ-я м/у т. 1 и т. 2 за время Δt

$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

Участок траектории (его длина) (—) наз. путём ΔS, пройденным м. т. за Δt

Видно: $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta S$

Отнош-е $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ наз. средней ск-тью $\vec{v}_{ср}$ за Δt

$\vec{v}_{ср} \equiv \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{v}_{ср} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$

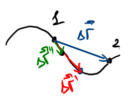
Отношение $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ наз. „мгновенной скор-тью" частицы в момент t_1

$$\vec{v}(t_1) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ вект. мгнов. ск-ти есть производ-я $\vec{r}$ по времени

Куда направлен $\vec{v}(t_1)$

При $\Delta t \to 0$ т. 2 б. стремиться по траект. к т. 1



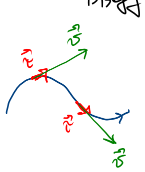
$\Delta t' = \frac{\Delta t}{2} \Rightarrow \Delta\vec{r}'$ $\Delta t'' = \frac{\Delta t}{4}$

$\Delta t \to 0 \Rightarrow$ т. 2 $\to$ т. 1 $\Rightarrow \vec{v}$ стремится по направл-ю к касат-й к траект-и в т. 1

$\boxed{\Rightarrow \text{Вектор } \vec{v} \text{ мгновен. ск-ти направл. по касат-й к траект-и}}$

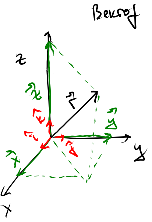
Введу ед. вектор $\vec{\tau}$, направлен. по касательной к точке траект-и

$|\vec{\tau}| = 1$ $\vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{v}$



$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}}$$

Вектор мгнов. ск-ти в Дек. СК



$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} + z\cdot\hat{k} \equiv (x, y, z)$ где: $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ - орты (ед. векторы) осей ДСК

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\cdot\hat{i} + y\cdot\hat{j} + z\cdot\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\cdot\hat{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\hat{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\hat{k} = v_x\cdot\hat{i} + v_y\cdot\hat{j} + v_z\cdot\hat{k}$$

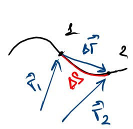
$\Rightarrow v_x = \frac{dx}{dt}$ $v_y = \frac{dy}{dt}$ ...

$$\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}$$ где: $\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$ $\dot{y} \equiv$ ...

Заметим:

чем меньше Δt, тем ближе $|\Delta\vec{r}|$ к ΔS

и в пределе



$\Delta S \neq |\Delta\vec{r}|$

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{|\Delta\vec{r}|} = 1} \Leftrightarrow dS = dr$$

где: $dr \equiv \lim_{\Delta r \to 0} \Delta r$ – бесконечно малая величина

Тогда:

$$|\vec{v}(t)| \equiv \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \equiv \frac{dS}{dt}$$

$\Rightarrow v = |\vec{v}(t)| = \frac{dS}{dt}$ т.е. модуль скорости есть производная пути по времени

т.е. v есть путь пройд-й телом за ед. времени

$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$

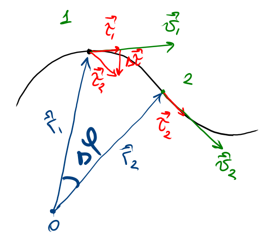
§ Ускорение Произвольно Движущ-ся М.Т.

Рассм-м движ-е по плоской кривой

$\Rightarrow$ $\vec{v}$ – м. меняться по величине и по направл-ю

Скорость измен-я вектора ск-ти $\vec{v}$ наз. ускор-м $\vec{a}$:

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad \text{т.к.} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v \cdot \vec{\tau}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

Рассм-м: $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} =$$

когда $\Delta t \to 0$ т.2 → т.1

⇓

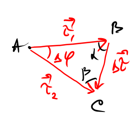
$\vec{\tau}_2$ б. повзреч-ся к $\vec{\tau}_1$

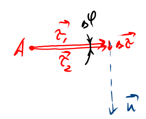
⇓

в $\triangle ABC$: $\Delta\varphi \to 0$

$\angle\alpha \to 90°$

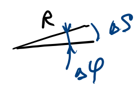
$\angle\beta \to 90°$





$\Rightarrow \Delta\vec{\tau} \to |\Delta\tau| \cdot \vec{n}$ где: $\vec{n}$ - ед. вектор, $\perp$ вектору $\vec{\tau}_1$

$\Delta\tau$ м. оценить, как длину дуги окр-ти



$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$

$$|\Delta\vec{\tau}| = |\vec{\tau}_1| \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$|\vec{\tau}_1| = 1$

⇓

$$\Delta\vec{\tau} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \Delta\varphi \cdot \vec{n}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi \cdot \vec{n}}{\Delta t} =$$

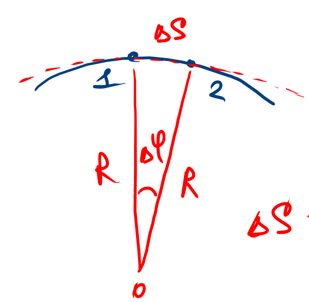
$\triangle ABC \sim \triangle O12$

$\Rightarrow \Delta\varphi$ в $\triangle ABC$ равен $\Delta\varphi$ в $\triangle O12$

действ-но: при $\Delta t \to 0$ т.2 → т.1 $\Rightarrow |\vec{r}_1| \approx |\vec{r}_2| \approx R$

где: R – радиус некоторой окруж-ти, кот. в окрест-ти т.1 сливается с траекторией на малом её участке

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta S}{R}$$



$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi$

$=$

R – наз-ся « радиусом кривизны »

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S \cdot \vec{n}}{R \, \Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_1) \cdot \vec{n}}{R} = \frac{v_1 \cdot \vec{n}}{R}$$

$\frac{\Delta S}{\Delta t} \to v(t_1)$

где: v_1 – модуль ск-ти частицы в т.1.

В общем случ-е :

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\text{тангенциальное}} + \underbrace{\frac{v^2}{R} \cdot \vec{n}}_{\text{нормальн. уск-е}} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n}$$

$\vec{a}_\tau$ – меняет скорость $\vec{v}$ по величине

$\vec{a}_n$ – меняет $\vec{v}$ по направл-ю