$p = p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}$

$n = n_0 \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}}$ — распр-е Больцмана

$n = \frac{N}{V}$

н. деталь:

$dN = \frac{n_0 g}{kT} N \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}} \cdot dh$ где N – общее число ч-ц

$\frac{1}{dh} \cdot \frac{dN}{N} = \frac{n_0 g}{kT} \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}} = A \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}}$

$\boxed{\frac{1}{dh} \cdot \frac{dN_h}{N} = f(h)}$ – ф-я распр-я Больцмана

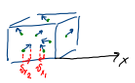
где: dN_h – кол-во молек. наход-ся на высоте h (или на разности высот от h до $h+dh$) и имеющих пот. эн. $E_p(h)$

вид ф-и распр. б: $f(h) = A \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}}$

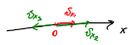
§ Ф-я распределения молекул

на примере распр. молек. уд. газа по компоненте ск-ти

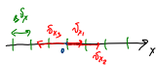
Пусть газ нах-ся в сд. обьёма, T, всего N молекул



Рассм. проекц. всех молек. на ось X:

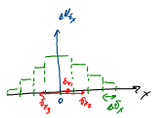


Разобьём ось ох на равные участки длиной $\Delta \delta_x$



Пусть ΔN_{δ_x} – число молек., скорость кот-х попали в интервал ск-тей от δ_x до $\delta_x + \Delta \delta_x$

т.к. молек. движ. хаотически
⇒ никакое направл. не предпочт-но
⇒ число ΔN_{δ_x} б. пропорц-ен $\Delta \delta_x$
+ молек. с больш. ск-тью –ер



– гистограмма

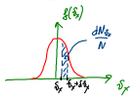
Высота ΔN_{δ_x} б. зависеть от $\Delta \delta_x$ и от N

Соотн. ф-ю, кот. не зависит от $\Delta \delta_x$ и N

⇒ $\frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N_{\delta_x}}{\Delta \delta_x}$ – не зависит

$\lim_{\Delta \delta_x \to 0} \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N_{\delta_x}}{\Delta \delta_x} = \frac{1}{N} \cdot \lim_{\Delta \delta_x \to 0} \frac{\Delta N_{\delta_x}}{\Delta \delta_x} \equiv \frac{1}{N} \cdot \frac{dN_{\delta_x}}{d\delta_x} \equiv f(\delta_x)$ – нез. ф-ей распр-я молекул по компоненте ск-ти

$\boxed{f(\delta_x) \equiv \frac{1}{N} \cdot \frac{dN_{\delta_x}}{d\delta_x}}$ – ф-я распр-я молекул по компон-те ск-ти !



⇒ $\frac{dN_{\delta_x}}{N} = f(\delta_x) \cdot d\delta_x$ – доля молек., компон. ск-ти кот-х лежат в инт-ле $\delta_x \div \delta_x + d\delta_x$

если $N \to \infty$

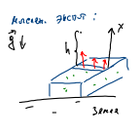
⇒ $\frac{dN_{\delta_x}}{N} \equiv dP_{\delta_x}$ – вер-ть того, что молек. газа имеет компон-ту ск-ти в инт-ле $(\delta_x; \delta_x + d\delta_x)$

Зная $f(\delta_x)$ м. найти кол-во частиц ΔN, ск-ти кот. лежат в инт-ле от δ_{x_1} до δ_{x_2}

$$\boxed{\Delta N = \int_{\delta_{x_1}}^{\delta_{x_2}} dN_{\delta_x} = N \cdot \int_{\delta_{x_1}}^{\delta_{x_2}} f(\delta_x) \cdot d\delta_x}$$

§ Вид ф-и распр-я для компоненты (проекции) скорости $f(\delta_x)$

Классич. эксп-т:



дым-ос на земле, узкая щель, молекулы вылетают вертик. вверх

⇒ высота подъёма на h опред-ся эн.:
$mgh = \frac{m\delta_x^2}{2}$

⇒ Число молек. в сходе с проекц. ск-ти δ_x в пределах числу молекул в поле сильно тяжести с пот. эн. $E_p = \frac{m\delta_x^2}{2}$

⇒ $f(\delta_x) \sim e^{-\frac{mgh(\delta_x)}{kT}} \sim e^{-\frac{m\delta_x^2}{2kT}}$

Введя коэф-т пропорц-ти A_x ⇒

$f(\delta_x) = A_x \cdot e^{-\frac{m\delta_x^2}{2kT}}$

Коэф-т A_x м. найти из усл. нормировки:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta_x) d\delta_x = \int \frac{dN}{N} = \frac{N}{N} = 1$

⇒ $A_x = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\delta_x^2}{2kT}} d\delta_x}$

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\delta_x^2}{2kT}} d\delta_x = \left[\frac{m\delta_x^2}{2kT} = y^2 \quad \frac{m}{2kT} \cdot 2\delta_x d\delta_x = 2y\,dy \right] = \left(\frac{2\pi kT}{m}\right)^{1/2}$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$

⇒ $A_x = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2}$ где: m – масса 1ой мол-лы

⇒ $\boxed{f(\delta_x) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{m\delta_x^2}{2kT}}}$! – ф-я распр. Максвелла по компоненте ск-ти

– аналог. вид имеют $f(\delta_y)$ и $f(\delta_z)$

Найдём долю мол-л у кот-х вектор $\vec{v}$ попадает одновременно попадает
$(v_x;\ v_x+dv_x)$ ·
$(v_y;\ v_y+dv_y)$
$(v_z;\ v_z+dv_z)$

это сложное событие, сост-е из совпадения 3х простых событий:

$$\frac{dN_{v_x,v_y,v_z}}{N} \cong dP_{v_x v_y v_z} = dP_{v_x}\cdot dP_{v_y}\cdot dP_{v_z} = \frac{dN_{v_x}}{N}\cdot\frac{dN_{v_y}}{N}\cdot\frac{dN_{v_z}}{N} =$$
$$= \underbrace{f(v_x)\,f(v_y)\cdot f(v_z)}\cdot dv_x\cdot dv_y\cdot dv_z$$

с др. стороны

$$\frac{dN_{v_x v_y v_z}}{N} \cong f(\cancel{v_x, v_y, v_z})\cdot dv_x\cdot dv_y\cdot dv_z \quad f(\vec{v})$$

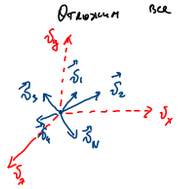
$$\Rightarrow \frac{dN_{v_x v_y v_z}}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)}{2kT}}\cdot dv_x\cdot dv_y\cdot dv_z = \underbrace{\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}_{f(\vec{v})}\cdot dv_x\cdot dv_y\cdot dv_z$$

$\Rightarrow$ $f(\vec{v})$ – ф-я распред. молекул по вектору ск-ти $\vec{v}$

$dN_{v_x v_y v_z}$ – кол-во молекул, вектор ск-ти кот-х имеет компоненты $(v_x,\ v_y,\ v_z)$

§ Распредел. Максвелла по абсолютн. знач-м скорости

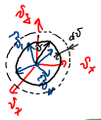
Отложим все векторы скоростей от общего начала – это фазовое прост-во



Найдём число мол-л dN_v абсолютные величины кот-х лежат $(v;\ v+dv)$
скорости: v

$\frac{1}{N}\cdot\frac{dN_v}{dv} \cong F(v)$ – ф-я распр. Макс. по модулю ск-ти

кол-во dN_v равно кол-ву молекул, вектора $\vec{v}$ кот-х попадают в шаровой слой радиусом v и толщиной dv



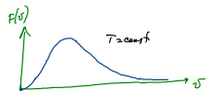
объём этого слоя: $4\pi v^2\cdot dv$

$\Rightarrow f(\vec{v})\cdot 4\pi v^2 dv = F(v)\cdot dv$

$\Rightarrow F(v) = f(\vec{v})\cdot 4\pi v^2 = 4\pi\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot v^2\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$

!

$$\boxed{F(v) = 4\pi\cdot\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot v^2\cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}}$$ – ф-я распр. М. по модулю ск-ти



§ Св-ва ф-и распр. Максвелла. Средн. ск-ти молекул

1° Малость шага с ширин v и больш. v

2° $\int_0^\infty F(v)\,dv = \int\frac{dN}{N} = \frac{N}{N} = 1 \Rightarrow \boxed{\int_0^\infty F(v)\,dv = 1}$

3° Максимум $F(v)$ – наиболее вероят. ск-ти $v_{вер}$

$\left.\frac{dF}{dv}\right|_{v_{вер}} = 0 \quad \dots \Rightarrow \boxed{v_{вер} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}}$

4° Средняя ск-ть $v_{ср} \cong \langle v\rangle$

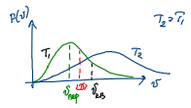
$\langle v\rangle = \int_0^\infty v\cdot F(v)\,dv = \dots = \sqrt{\frac{8}{\pi}\cdot\frac{kT}{m}}$

если известна $A(v)$
$\Rightarrow \langle A\rangle = \int_0^\infty A(v)\cdot F(v)\cdot dv$

5° Средняя квадрат. ск-ть

$v_{кв} \cong \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\int_0^\infty v^2 F(v)\,dv} = \dots = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

(сравн-е $v_{кв}$, см. ранее)



$T_2 > T_1$