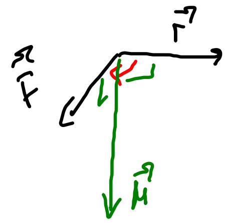
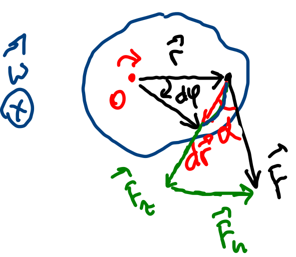
$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$



§ Работа внешней силы при вращении Тв. Тела

Пусть тело вращ-ся под действ-м $\vec F$ вокруг оси O.
Найдем работу $\vec F$



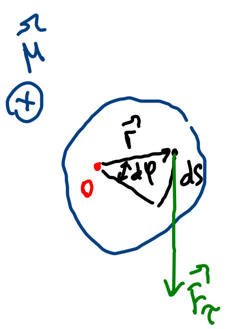
$$dA = \vec F \cdot d\vec r = F \cdot dr \cdot \cos\alpha = F_\tau \cdot dr = F_\tau \cdot dS$$

dS – длина дуги окр-ти, кот. проходит точка приложения силы

$$dA = F_\tau \cdot dS$$

$$dS = r \cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow dA = F_\tau \cdot r \cdot d\varphi = \left[\begin{array}{l} \omega = \frac{d\varphi}{dt} \\ d\varphi = \omega \cdot dt \end{array} \right] = \underbrace{F_\tau \cdot r}_{M} \cdot \omega \cdot dt = M \cdot \omega \cdot dt$$



$$\Rightarrow \underline{dA = M \cdot \omega \cdot dt}$$

с учетом направл-й $\vec\omega$ и $\vec M$:

$$dA = (\vec M, \vec\omega) \cdot dt = (\vec M, d\vec\varphi)$$

$$\boxed{dA = (\vec M, d\vec\varphi) = \vec M \cdot d\vec\varphi} \quad !$$

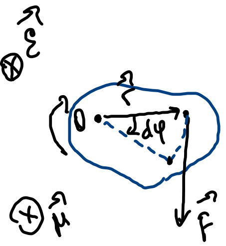
$$dA = M \cdot d\varphi$$

$\Rightarrow$ Полная работа: $A = \int dA = \int M \cdot d\varphi$

Если $M = const \Rightarrow \boxed{A = M \cdot \Delta\varphi}$! $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

работа силы $\vec F$ = моменту силы на изменение угла поворота Тв. Тела

§ Основное ур. динамики вращат. движ-я тв. тела



При повороте тела на угол $d\varphi$ сила $\vec F$ совершит

$$dA = M\cdot d\varphi$$

которая пойдет на измен-е кин. эн. тв. тела

$$dA = dE_k$$

$$dE_k = d\left(\frac{I\cdot\omega^2}{2}\right) = \frac{I}{2}\cdot 2\omega\cdot d\omega = I\cdot\omega\cdot d\omega$$

$y = y(x)$

$dy = y'_x\cdot dx$

$\Rightarrow M\cdot d\varphi = I\cdot\omega\cdot d\omega$ $\qquad d\varphi = \omega\cdot dt$

$\Rightarrow M\cdot\cancel{\omega}\cdot dt = I\cdot\cancel{\omega}\cdot d\omega$

$\Rightarrow M\cdot dt = I\cdot d\omega$

$\Rightarrow M = I\cdot\frac{d\omega}{dt} = I\cdot\varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{M = I\cdot\varepsilon}$ — осн. зак. динамики вращ. движ. тв. тела в скалярной форме

$\Rightarrow$ учтя направл-е $\vec M$ и $\vec\varepsilon$

$\Rightarrow \boxed{\vec M = I\cdot\vec\varepsilon}$ — осн. зак. в векторной форме !

Если несколько (N-штук) сил действ-т на тело:

$$\boxed{I\cdot\vec\varepsilon = \sum_{k=1}^{N}\vec M_k}$$

где: I — момент инерц. тв. тела относит. оси вращ-я

$\vec\varepsilon$ — углов. уск-е

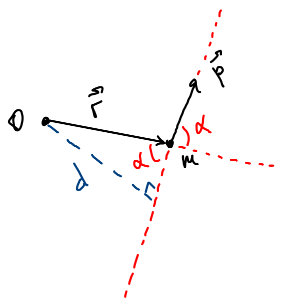
$\vec M_k = [\vec d_k, \vec F_k]$ — момент $\vec F_k$ силы

Сравним с II з. Н.: $m\cdot\vec a = \sum_k \vec F_k$ $\Rightarrow$ роль массы m при вращат. движ-и играет момент инерции тв. тела $I = \sum_i m_i r_i^2$

— роль силы $\vec F$ играет $\vec M_k$

§ Момент Импульса Мат. Точки и Момент Импульса Тв. Тела (Система мат. точек)

Рассм. движ-е мат. точки с m и импульсом $\vec p = m\cdot\vec v$ относительно выделенной точки O



⇒ Моментом импульса мат. точки относит. т. O наз-ся:

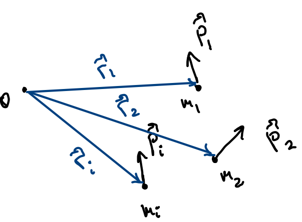
$$\vec L \equiv [\vec r, \vec p] = [\vec r, m\vec v]$$

Модуль момента имп-са:

$$L = r\cdot p\cdot \sin\alpha = d\cdot p$$

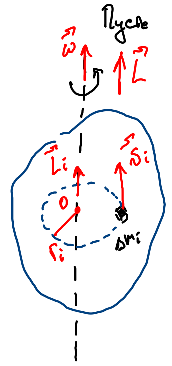
где: d – плечо импульса – длина $\perp$, из т. O на прямую, вдоль кот-й направлен $\vec p$

$d = r\cdot\sin\alpha$ – плечо импульса относит-но т. O



Момент имп. системы мат. точек относит. т. O (или ось вращения)

$$\vec L = \sum_i \vec L_i = \sum_i [\vec r_i, \vec p_i]$$



Пусть тв. тело вращ-ся вокруг некоторой оси с $\vec\omega = const$

Разобьём тело на малые „кусочки" с δm_i (считая каждую мат. точкой)

$\forall$ кусочек движ-ся по r_i и обозн-т $\vec v_i$

$\vec p_i = \delta m_i \vec v_i$ ⇒ $\vec p_i \uparrow\uparrow \vec v_i$ т.к. $r_i \perp v_i$ ⇒ $r_i = d_i$ – плечо импульса

момент имп-са „кусочка": $L_i = \delta m_i v_i \cdot r_i$

т.к. $v_i = r_i\cdot\omega$ ⇒ $L_i = \delta m_i r_i \omega r_i = \delta m_i r_i^2 \omega = I_i\cdot\omega$

I_i – момент инерции „кусочка", рассматрив-го как матер. точка

Момент Имп. Тв. Тела $= \sum$ мом-в имп. мат. точек („кусочков") из кот. сост-т тв. тело

$$\Rightarrow L = \sum_i L_i = \sum_i \delta m_i r_i^2 \omega = \sum_i I_i\cdot\omega = \omega\sum_i I_i = \omega\sum_i \delta m_i r_i^2 = \omega\cdot I$$

где: $I = \sum_i I_i = \sum_i \delta m_i r_i^2$ – момент инерц. тв. тела, вычисл-й относит. заданной оси вращ-я

! ⇒ $L = I\cdot\omega$

или в векторной форме:

! $\vec L = I\cdot\vec\omega$ – момент. имп-са тв. тела есть произв-е момента инерц-и тв. тела I на угловую ск-ть $\vec\omega$

§ Зак. Сохр-я Момента Импульса

$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$

$\frac{d}{dt} \Rightarrow \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I \cdot \vec{\omega}\right) = \left[I = const \right] = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\varepsilon}$

но для тв. тела: $I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_k \vec{M}_k \equiv \vec{M}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$ — ур. моментов

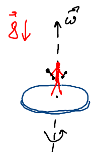
$\Rightarrow$ причина изменения $\vec{L}$ есть $\vec{M}$

если $\vec{M} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{const}$

или $I_1 \cdot \vec{\omega}_1 = I_2 \cdot \vec{\omega}_2 = \overrightarrow{const}$

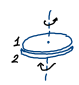
— зак. сохр-я момента импульса тв. тела

\# Человек на скамье Жуковского



чел. на скамье в руках гантели

r – расст-е от гантелей до оси вращ-я



что произойдет, если руки разведет?

Вдоль оси момент силы mg: $\vec{M}_{mg} = 0$

$\Rightarrow$ выполн. зак. сохр-я мом. имп.: $\vec{L} = \overrightarrow{const}$

$\Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_2$

$\vec{L}_1 = (I_0 + 2 \cdot m \cdot r_1^2) \cdot \vec{\omega}_1 \qquad \vec{L}_2 = (I_0 + 2m \cdot r_2^2) \cdot \vec{\omega}_2$

где: I_0 – момент. инерц. чел-ка относит. оси вращ-я

$\Rightarrow (I_0 + 2m r_1^2)\omega_1 = (I_0 + 2m \cdot r_2^2) \cdot \omega_2$

чел разводит руки $\Rightarrow r_2 > r_1 \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$

частота вращения уменьшилась.

Пост. движ-я мат. точки	Вращат. движ. Тв. Тела
масса m	момент инерции I
Скор-ть $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Углов. ск-ть: $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускор-я: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Углов. уск-е: $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила $\vec{F}$	момент силы $\vec{M} = [\vec{d}_1, \vec{F}]$ d – плечо силы
Импульс $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Момент имп-са $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$
Осн. зак. динамик (II з. Ньютона) $m\vec{a} = \sum_k \vec{F}_k$	Осн. зак. вращ. движ. Тв. Тела $I \cdot \vec{\varepsilon} = \sum_k \vec{M}_k$
Работа: $dA = F_S \cdot dS$	Работа: $dA = M \cdot d\varphi$
Кин. эн. $E_k = \frac{m v^2}{2}$	Кин. эн. вращат. дв. $E_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2}$
II з. Ньютона ч/з Импульс $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Уравн. моментов: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

§ Условие равнов-я Тв. Тела

Тв. Тело покоится $\Rightarrow$ нет пост. движ. и нет вращ-я

1) Сумма внеш. сил, действ. на тело, = 0

$$\sum_k \vec{F}_k^{\,внеш} = 0$$

2) Результир-й Момент внеш. сил, вычислен-й относит-но любой точки Тв. Тела, = 0

$$\sum_k \vec{M}_k^{\,внеш} = 0$$