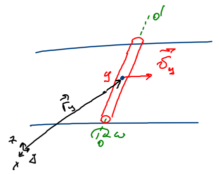
Гл Механика Тв. Тела.

Тв. Тело – тело, ...

Движ. Тв. Тела – сложное, состоит из

а) Поступат. движ. точки центра масс

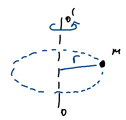
б) Чисто вращат. движ. вокруг „мгновенной" оси



Остановимся на чисто вращат. движ-и

§ Момент инерции Тв. Тела

Пусть мат. точка м, вращ-ся по окр-ти с рад-м r



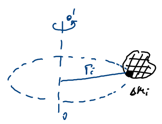
момент. инерц. мат. точки:

$I = m \cdot r^2$

Пусть Тв. Тело, вращ-ся вокруг оси OO'

Разобью тело на кусочки, малые, что они ≈ мат. точкам с массами Δm_i

Δm_i движутся по окр-ти с r_i



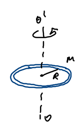
⇒ Момент инерц. Тв. Тела = сумма моментов инерц. мат. точек из кот. он сост-т

$$I = \sum_i I_i = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2$$

Пусть тело – обруч, массой m и радиусом R

$$\Rightarrow I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i$$

$$\Rightarrow I = m \cdot R^2$$

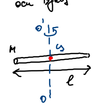
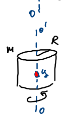
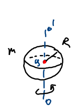


Если масса распределена непрерывно по объему тела

$$\sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 \to \int dm \cdot r^2$$

$$\Rightarrow I = \int_V r^2 dm$$ – мом. инерц. Тв. Тела при непрерывн. распр-и массы по объему тела

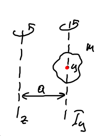
Моменты инерции тел

Тв. Тело	Полож. оси вращ-я	Момент инерции
Тонкий стержень длины l		$I_ц = \frac{1}{12} m \cdot l^2$
Сплошной цилиндр		$I_ц = \frac{1}{2} m R^2$
Шар, радиуса R		$I_ц = \frac{2}{5} m R^2$

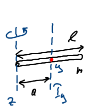
Если ось вращения произвольна, не проходит ч/з точку ц-масс:

⇒ Теорема Гюйгенса – Штейнера

$$I_z = I_ц + m \cdot a^2$$



\# момент ин. тонкого длин. стержня длиной l и массой m, вращ-ся относит. оси, проходящ. ч/з конец стержня



$I_ц = \frac{1}{12} m l^2$

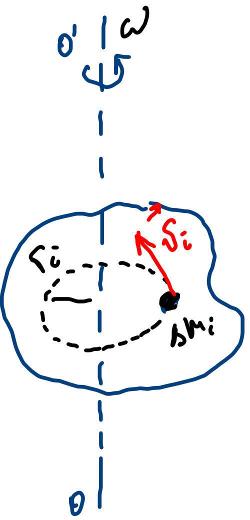
$I_z = I_ц + m \cdot a^2$

$a = l/2$

$$\Rightarrow I_z = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{m l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{1}{3} m l^2$$

§ Кинет. эн-я вращ. движ-я тв. тела



Разобью тело на „кусочки" с Δm_i

Кин. эн. тв. тела = кин. эн. частей („кусочков"), составл-х тв. тело

$$E_k = \sum_i E_{k_i} = \sum_i \frac{\Delta m_i \cdot \upsilon_i^2}{2}$$

Но! $\upsilon_i = r_i \cdot \omega$

$$\Rightarrow E_k = \sum_i \frac{\Delta m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \underbrace{\sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2}_{I} = \frac{\omega^2}{2} \cdot I$$

где: I – момент инерц. тв. тела относит. оси вращ-я

$\Rightarrow$ кин. эн. чисто вращательн. движ-я

$$\boxed{E_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2}} \; !$$

Если тело участв-т в поступат-м и вращат. движ-и

$$\Rightarrow E_k = \frac{m \cdot \upsilon_ц^2}{2} + \frac{I_ц \cdot \omega^2}{2} = E_k^{(пост)} + E_k^{(вращ.)}$$

где: m – масса тела

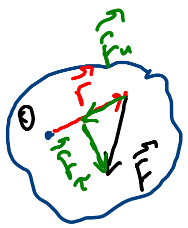
$\upsilon_ц$ – скор-ть точки центр. масс

$I_ц$ – мом. инерц., вычислен. относит. оси, проход-й ч/з точку центра масс.

§ Момент силы

Пусть тв. тело вращ-ся вокруг неподв. оси O

Пусть на тело действ-т сила $\vec{F}$ $\perp$ оси вращ-я

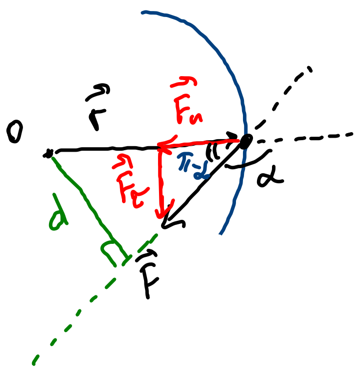


$$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$$

действие $\vec{F}_n$ проходит ч/з ось вращ-я $\Rightarrow$ не влияет на вращ-е тела

$\Rightarrow$ $\vec{F}_\tau$ – приводит к доп. вращению тела

$\Rightarrow$ вводят M – момент силы



$$M \equiv F_\tau \cdot r \quad !$$

F_τ – тангенциальн. проекц. $\vec{F}$

r – расст-е от оси вращ-я до точки прилож. силы $\vec{F}$

$$M = F_\tau \cdot r = F \cdot \sin(\pi - \alpha) \cdot r = F \sin\alpha \cdot r \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

$d \equiv r \sin\alpha = r \cdot \sin(\pi - \alpha)$ – плечо силы

– кратч. расст-е от оси вращ-е до прямой, вдоль которой действ-т сила $\vec{F}$

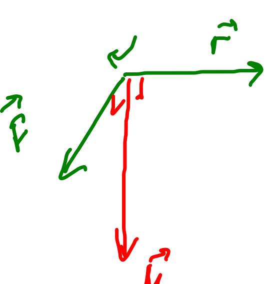
$$\Rightarrow \quad M = F_\tau \cdot r = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d$$

момент силы = Сила × Плечо

Вектор момента силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$\vec{r}$ – вектор, провед. от оси вращ. до точки прилож. силы



направл. $\vec{M}$ $\rightarrow$ правило правого винта

$M = F \cdot \sin\alpha \cdot r$ $\Rightarrow$ если $\alpha = 0$ $\Rightarrow$ $M = 0$