§ Потенц. эн-я

Поля:

- стацион. силовое поле
- однородное силовое поле
- консервативное силов. поле

Конс. сил. поле – поле в кот. работа сил поля не зависит от формы траект-и

⇒ Работа в поле конс. сил по замкнут. траект-и $= 0$

(*) $$A = \oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$!

$\oint_L$ – интеграл берётся по замкнут. траект-и

⇒ ∀ поле для кот. выполн (*) м. утвержд-ть, что оно консерв-но.

∀ точке консерв. стац. силового поля м. сопост-ть $E_п(x, y, z)$

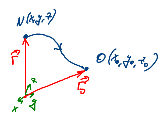
$E_п$ – потенц. эн-я

Потенц. эн. тела наз. ...

Пусть N – точка силов. поля: $N(x, y, z)$

O – точка, принятая за нач. отсчета эн-и: $O(x_0, y_0, z_0)$

$$E_п \equiv \int_{N(x,y,z)}^{O(x_0,y_0,z_0)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$$



В общем виде:

$$E_п = \int \vec{F} d\vec{r} + C$$

где: C – произвольная константа

⇒ $E_п$ определ-ся с точностью до констант

Начало отсчета эн-и выбирают там, где силы $\to 0$ ⇒ $E_п(\infty) = 0$

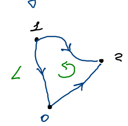
Для таких полей:

$$E_п = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$ ⇒ Пот. эн. – ?оо..

$$E_п(\infty) = 0$$

Найдём A_{12}, соверш-ую конс. силами поля при перемещ-и тела из 1 в 2

Рассм. 2е траект-и: 1–2 и 1–0–2



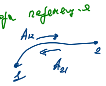
Поле консерв-но ⇒ $\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

с др. стороны: $0 = A_{10} + A_{02} + A_{21}$

⇒ $-A_{21} = A_{10} + A_{02}$

0 – нач. отсчета пот. эн.

заметим, что: $A_{21} = -A_{12}$ т.к. меняется направл. вектора перемещ-я $d\vec{r}$



⇓

$A_{12} = A_{10} + A_{02}$

аналогично: $A_{02} = -A_{20}$

⇒ $A_{12} = A_{10} - A_{20}$ ⇒ $A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2} = -(E_{п_2} - E_{п_1}) = -\Delta E_п$

убыль пот. эн.

Но! $A_{10} \equiv E_{п_1}$ $A_{20} \equiv E_{п_2}$

т.е. $A_{12} = -\Delta E_п$ ⇒ работа в поле конс. сил связана с убылью пот. эн-и

Для элементарного перемещ-я:

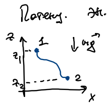
$$dA = -dE_п$$

Теор. об измен-и потенц. эн-и:

$A = -\Delta E_п$ – в интегр. форме

$dA = -dE_п$ – в дифф. форме

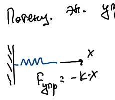
Потенц. эн. в однородном поле силы тяжести



$A_{12} = mg(z_1 - z_2)$ <см. ранее>

$A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2}$ ⇒ $E_п = mg \cdot z$ – пот. эн. частицы в однородном поле силы тяжести

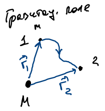
Потенц. эн. упруго деформ. пружины



$$A_{12} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = E_{п_1} - E_{п_2}$$ ⇒ $$E_п = \frac{kx^2}{2}$$ – пот. эн. упруго деформ. пружины

x – удлинение пружины

Гравитац. поле



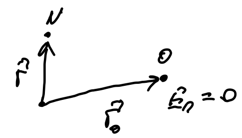
$$A_{12} = \gamma \frac{Mm}{r_1} - \gamma \frac{Mm}{r_2}$$

⇒ $$E_п = \gamma \frac{M \cdot m}{r}$$ – пот. эн. частицы с массой m в поле массы M

⇒ Гравитац. поле – консерват. поле.

§ Связь м/у силой и потенц. эн.

$E_п = \int_{\vec r}^{\vec r_0} \vec F d\vec r \Rightarrow E_п(x,y,z) = -\int_{\vec r_0}^{\vec r(x,y,z)} \vec F \cdot d\vec r$ $\quad \vec r$ задает координату точки поля



Для элемент. перемещ-я:

$dA = -dE_п$

$$dA = \vec F d\vec r = \left[\begin{array}{l} \text{в ДСК:} \\ \vec F = F_x \cdot \hat i + F_y \cdot \hat j + F_z \cdot \hat k \\ d\vec r = dx \cdot \hat i + dy \cdot \hat j + dz \cdot \hat k \end{array} \right] = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = -dE_п(x,y,z)$$

Пусть перемещ-е частицы идет вдоль оси x $\Rightarrow d\vec r \parallel$ осью x

$\Rightarrow y, z = const \Rightarrow dy = dz = 0$

$$\Rightarrow F_x \cdot dx = -dE_п(x,y,z)\Big|_{\substack{y=const \\ z=const}} \Rightarrow F_x = -\frac{dE_п(x,y,z)}{dx}\Big|_{\substack{y=const \\ z=const}} \equiv -\frac{\partial E_п(x,y,z)}{\partial x}$$

где: $\frac{\partial E_п}{\partial x}$ - частная производ-я по x

По аналогии: $F_y = -\frac{\partial E_п(x,y,z)}{\partial y}$ $\quad F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec F = F_x \cdot \hat i + F_y \cdot \hat j + F_z \cdot \hat k = -\underbrace{\left(\frac{\partial E_п}{\partial x} \cdot \hat i + \frac{\partial E_п}{\partial y} \cdot \hat j + \frac{\partial E_п}{\partial z} \cdot \hat k \right)}_{\text{«вектор градиента функции } E_п\text{»}} \equiv -\vec{grad}\, E_п$$

В матем: $grad\, E_п$ - вектор, указывающий направ. в кот. $E_п(x,y,z)$ возрастает наиб. быстро

Введем опер-р: $\vec\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \hat i + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \hat j + \frac{\partial}{\partial z} \hat k$ – «опер-р набла»

опер-р – правило или действ-е ... над следует за ним ф-ей

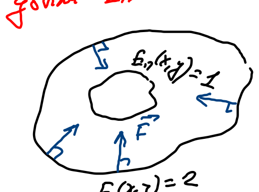
$$\vec F \equiv -\vec{grad}\, E_п \equiv -\vec\nabla E_п$$

«–» $\Rightarrow \vec F$ направлена в сторону наискор. убыв-я $E_п$

Эквипотенц. пов-ть – пов-ть, для кот: $E_п(x,y,z) = const$

$\vec{grad}\, E_п$ всегда $\perp$ эквипот. пов-ти

$\Rightarrow \vec F = -\vec{grad}\, E_п \Rightarrow$ Сила $\vec F$ направл. $\perp$ эквип. пов-ти в сторону наискор. убыв. $E_п$



§ Влияние неконсерв. сил. Зак. сохр-я полной мех. эн.

Пусть частица движ. в поле консерв. и неконсерв. сил.
⇒ За счет этих сил част. изменит. кин. эн-ю:

⇒ $dA = dE_k$ или $A_{12} = \Delta E_k$

С др. стороны: $A_{12} = A_{12}^{конс.} + A_{12}^{некон.}$

Но $A_{12}^{конс} = -\Delta E_п$

⇒ $\Delta E_k = A_{12} = A_{12}^{конс} + A_{12}^{некон} = -\Delta E_п + A_{12}^{некон}$

⇒ $E_{k_2} - E_{k_1} = E_{п_1} - E_{п_2} + A_{12}^{некон}$

⇒ $A_{12}^{некон} = (E_{k_2} + E_{п_2}) - (E_{k_1} + E_{п_1})$

$E \equiv E_k + E_п$ — полная механ. эн-я

⇒ $A_{12}^{некон} = E_2 - E_1$ или $A_{12}^{некон} = \Delta E$

т.е. работа некон. сил приводит к изменен. полн. мех. эн-и

Теор. об измен. мех. эн.

Ранее: работа сил трения: $A_{12}^{тр} = -\mu m g S < 0$
⇒ $A_{12}^{тр}$ – неконс-я
– диссипативная сила ($A_{12} < 0$)

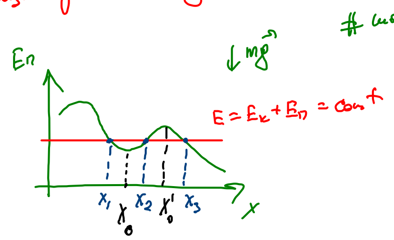
⇒ 1°. Диссипат. силы уменьш-т полн. мех-ю эн. системы в виде тепла

2°. На сист. не действ-т неконсерв / диссип. силы
⇒ Полн. мех. эн. сохр-ся

$A_{12}^{некон} = 0$ ⇒ $E_2 = E_1 = const$

§ Потенциальные кривые. Условия равновесия мех. системы

Потенц. кривая — завис-ть $E_п$ от 1ой координаты

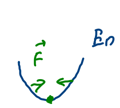


шарик скользит по проволоке в поле $m\vec g$

Движ. возможно там, где $E_п \le E$:
$x_1 \le x \le x_2$, $x \ge x_3$

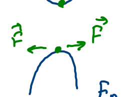
Область $x_2 \div x_3$ — «область потенц. барьера»

X_0 – точка устойчив. равнов-я ⇒



$F_x = -\frac{dE_п}{dx}$ ⇒ $E_п$ мин

X_0' – точка неустойчив. равн-я ⇒



$F_x = -\frac{dE_п}{dx}$ ⇒ $E_п$ мах