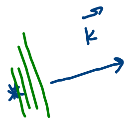


– ур. бегущей в произв-м направл. волны

$$S(\vec r,t) \equiv S(x,y,z,t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right)$$

$\vec r$ – рад-вектор произв-й точки среды

$\vec k$ – волновой вектор

$$\vec k \equiv \begin{cases} |\vec k| = \dfrac{2\pi}{\lambda} & \text{– волн. число} \\ \vec k = k\cdot\vec n & \text{– направлен в сторону распр. волны} \end{cases}$$

§ Волновое ур-е

– Вид ур-я, кот. подчиняется ур. бегущей волны

$$S(\vec r,t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right) \qquad \vec k\cdot\vec r = k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z$$

Найдём:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-A\cdot\sin\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right)\cdot\omega\right) = -\omega^2 A\cdot\cos\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right) = -\omega^2\cdot S$$

$$\Rightarrow \boxed{S = -\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}} \quad (*)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -A\cdot\sin\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega t - \left(k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z\right) + \varphi_0\right) = +k_x\cdot A\cdot\sin\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \ldots = -k_x^2\cdot A\cdot\cos\left(\omega t - \vec k\cdot\vec r + \varphi_0\right) = -k_x^2 S \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -k_y^2\cdot S \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -k_z^2\cdot S$$

Сложение даёт:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)\cdot S = -k^2\cdot S = \left\{\text{из } (*)\right\} = \frac{k^2}{\omega^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

$$! \quad \boxed{\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}} \quad \leftarrow \text{волновое ур-е}$$

любая ф-я S, удовл-я волнов. ур-ю, описывает волновой процесс

или коротко:

$$! \quad \boxed{\Delta S = \frac{1}{v^2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}}$$

где: $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа

Волновая Оптика

О. – раздел физики, изуч-й природу света. Закон-ти его испуск-я, распр-я и вз-я с вещ-м

Свет: – как э/м волна
– поток особых частиц (фотонов)

⇒ здесь речь о свете, как о э/м волне

§ Плоская э/м волна

В основе – ур. Максвелла:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{– „вихревое Э.П. порожд-ся измен-ся во времени М.П."} \\ \mathrm{div}\,\vec{D} = \rho & \text{– „источником Э.П. яв. свободные заряды"} \\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{– „вихревое М.П. порожд-ся токами провод-ти } (\vec{j}) \text{ и изменяющ. во времени Э.П."} \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 & \text{– „источников (зарядов) М.П. не сущест-т"} \end{cases}$$

где: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ – электрич. смещ-е

$\vec{B} = \mu\mu_0 \cdot \vec{H}$ – магнитн. индукция

ρ – объёмн. пл-ть свободн. заряда

μ – магнитн. прониц-ть вещ-ва

ε – электр. прониц. вещ-ва

$\vec{E}$ – напряж. Э.П.

$\vec{H}$ – напряж. М.П.

Вводя „опер-р набла" $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\hat{k}$ $\quad$ $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ – ед. орты декарт. осей

ур. Максвелла примут вид:

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \vec{j} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$\vec{\nabla}\vec{D} = \vec{\nabla}\cdot\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0 \cdot \vec{\nabla}\vec{E} = 0$

Рассм. незаряженную ($\rho = 0$) нет зарядов и непроводящую ($\vec{j} = 0$) нет токов среду

$$\Rightarrow \begin{cases} 1)\ [\vec{\nabla}, \vec{E}] = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ 2)\ \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \\ 3)\ [\vec{\nabla}, \vec{H}] = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ 4)\ \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \end{cases} (**)$$

Ротор от (1)

$$[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = -\left[\vec{\nabla}, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right] = -\frac{\partial}{\partial t}[\vec{\nabla}, \vec{B}] = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\mu_0[\vec{\nabla}, \vec{H}] =$$

$$= [\text{из } (3)] = -\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

с др. стороны:

$$\underbrace{[\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]]}_{\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}} = \underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\cancelto{0}{\vec{\nabla}, \vec{E}})}_{\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})} - \underbrace{\vec{E}\cdot(\cancelto{\Delta}{\vec{\nabla}, \vec{\nabla}})}_{\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})}$$

$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b}\cdot(\vec{a}, \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$

правило „БАЦ – ЦАБ"

$$\Rightarrow \boxed{+\Delta\vec{E} = +\underbrace{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}_{1/v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

– Волновое ур-е для некоторого волн. процесса, распространяющ-ся со ск-тью:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \equiv \frac{c}{n}$$

где: $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\cdot10^8$ м/с – ск-сть света в вакууме

$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ – абсолютный показатель преломл-я среды

аналогично, б. справедливо из (3):

$$\Delta\vec{H} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

⇒ решения волновых ур-й для $\vec{E}$ и $\vec{H}$ (в самом простом случае) есть бегущая волна:

⇒ реш-е м. искать в виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_m\cdot\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m\cdot\cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)$$

Подставлю эти выраж-я в (**). Действие $\vec{\nabla}$ сведётся к его замене на $\vec{k}$, действие $\frac{\partial}{\partial t}$ к замене на ω

$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ $\quad \vec{B} \uparrow\uparrow \vec{H}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1')\ [\vec{k}, \vec{E}] = -\omega\cdot\vec{B} \\ 2')\ \vec{k}\cdot\vec{E} = 0 \\ 3')\ [\vec{k}, \vec{H}] = \omega\cdot\vec{D} \\ 4')\ \vec{k}\cdot\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$2' \Rightarrow \vec{k} \perp \vec{E}$

$1' \Rightarrow \vec{B} \perp \vec{k} \perp \vec{E}$ $\quad \Rightarrow \vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ – образуют правую тройку векторов

из $1'$, для модулей величин:

$k\cdot E = \omega\cdot B$ $\qquad k = \frac{\omega}{v}$

$\Rightarrow \frac{\omega}{v}\cdot E = \omega\cdot B \Rightarrow E = v\cdot B$

подставляя $v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}$, $B = \mu\mu_0 H$

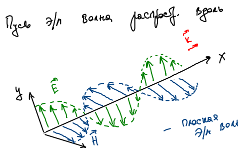
⇓

$$E = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}\cdot\mu\mu_0 H = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\cdot H$$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\cdot E = \sqrt{\mu\mu_0}\cdot H}$$

! д. выполняться в волне

Пусть э/м волна распрост. вдоль оси X



– плоская э/м волна

$\vec{k} \updownarrow\updownarrow \hat{i}$

$\vec{E} \updownarrow\updownarrow \hat{j}$

$\vec{H} \updownarrow\updownarrow \hat{k}$

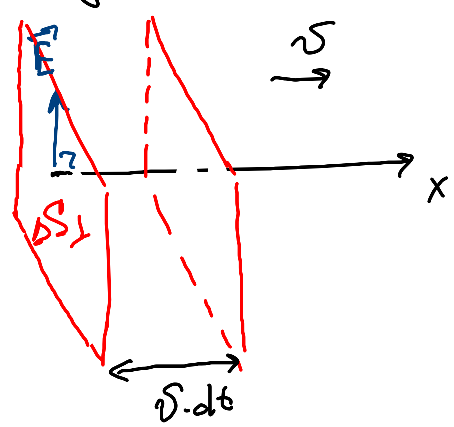
$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \dfrac{c}{n}$

$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$

$\varepsilon\varepsilon_0\cdot E^2 = \mu\mu_0\cdot H^2$

§ Энергия, переносимая плоской э/м волной

Пусть вдоль оси X распр-ся э/м волна



Э/м волна переносит ч/з площадку $\Delta S_\perp$, расположенную $\perp$ направл. распр-я волны, энергию:

$$dW = w \cdot dV$$

где: w – объемн. плотн. энергии

dV – объем, на кот. смещается волна за dt

$$dV = \Delta S_\perp \cdot \upsilon \cdot dt$$

$$\Rightarrow dW = w \cdot \Delta S_\perp \cdot \upsilon \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{\Delta S_\perp \cdot dt} = w \cdot \upsilon \equiv N$$

– эн-я, переносимая ч/з един. площ-ку за ед. времени

$$w = \underset{\text{эл. поле}}{w_E} + \underset{\text{маг. поле}}{w_H} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \left[\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\, E = \sqrt{\mu\mu_0}\, H\right] = 2 \cdot w_E = 2 \cdot w_H =$$

$$= \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0}\, E \cdot H = \frac{E \cdot H}{\upsilon}$$

$$\Rightarrow N \equiv \frac{dW}{dt \cdot \Delta S_\perp} = E \cdot H$$

т.к. $\vec{E} \perp \vec{H}$ $\Rightarrow$ м. записать векторное равенство:

$$\vec{N} = \left[\vec{E}, \vec{H}\right]$$

– вектор Пойнтинга

$\vec{N} \equiv \vec{S}$ (часто в книгах)

Физ. смысл N – энерг., переносимая плоск. э/м. волной за ед. времени ч/з ед. площадку, $\perp$ направл. распрост. волны!