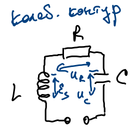
механ. кол-я

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\beta}\dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\cdot x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0}\cdot\cos\Omega t \qquad F = F_0\cdot\cos\Omega t$$

ДУ вын. кол-й: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0\cdot\cos\Omega t$ (*)

колеб. контур



$u = u_0\cdot\cos\Omega t$

роль вынужд. силы играет внеш. напр-е.

з. Ома:

$$\underbrace{IR}_{u_R} + \underbrace{\frac{q}{C}}_{u_C} = \underbrace{-L\frac{dI}{dt}}_{\mathcal{E}_S} + u_0\cdot\cos\Omega t \qquad I = \frac{dq}{dt}$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + \underbrace{\frac{R}{L}}_{2\beta}\cdot\dot{q} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}\cdot q = \underbrace{\frac{u_0}{L}}_{f_0}\cdot\cos\Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{q} + 2\beta\cdot\dot{q} + \omega_0^2\cdot q = f_0\cdot\cos\Omega t \quad (**)$$

если $S \equiv \{x, q, \dots\}$

$\Rightarrow$ ДУ вынужд-х кол-й

$$(***) \quad \boxed{\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta\cdot\frac{dS}{dt} + \omega_0^2\cdot S = f_0\cdot\cos\Omega t} \quad !$$

Ω – частота вынужд. силы

где: $2\beta = \frac{r}{m}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\quad f_0 = \frac{F_0}{m}$ – для мех. кол-й

$2\beta = \frac{R}{L}$ $\quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ $\quad f_0 = \frac{u_0}{L}$ – для электр/-магн. кол-й

По матем. (***) – неоднородн. ДУ с постоян. коэф-ми

$\Rightarrow$ его реш-е: $S(t) = S_{одно.}(t) + S_{неодн.}(t)$

одноф. ур-е – это ДУ зат. кол-й $\Rightarrow$ $S_{одн}(t) = A_0\cdot e^{-\beta t}\cdot\cos(\omega t + \varphi_0)$ $\qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

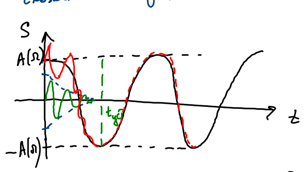
частн. реш. неодн. ур-е: $S_{неод}(t) = A(\Omega)\cdot\cos(\Omega t - \varphi_\Omega)$ $\qquad \varphi_\Omega$ – нач. фаза установивш. кол-й

где: $A(\Omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\cdot\Omega^2}}$ $\qquad \operatorname{tg}\varphi_\Omega = \dfrac{2\beta\cdot\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

$\Rightarrow$ Общ. реш-е (***):

$$S(t) = A_0\cdot e^{-\beta t}\cdot\cos(\omega t + \varphi_0) + A(\Omega)\cdot\cos(\Omega t - \varphi_\Omega)$$

сложим их графически:



при $t > t_{уст}$: вклад от затух. кол-й пропадает, остается только установивш. кол-я

$\Rightarrow$ б. рассм-ть только $t > t_{уст}$

$\Rightarrow$ $S(t) = A(\Omega)\cdot\cos(\Omega t - \varphi_\Omega)$

$A(\Omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$ – изобразим граф-ки

если $\Omega = 0$ $\Rightarrow$ $A(0) = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$

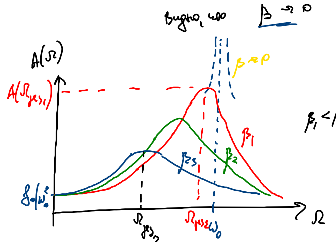
если знамен-ль $A(\Omega)$ имеет MIN $\Rightarrow$ $A(\Omega)$ – имеет MAX

ищем экстремум: $\dfrac{d\left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2\right)}{d\Omega^2} = -2(\omega_0^2 - \Omega^2) + 4\beta^2 = 0$

$\Rightarrow$ $\Omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ – резонансная частота

$$\Rightarrow A(\Omega_{рез}) = \frac{f_0}{\sqrt{(2\beta)^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}} = \dots = \frac{f_0}{2\beta\cdot\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

видно, что $\beta \to 0$ $\Rightarrow$ $A(\Omega_{рез}) \to \infty$



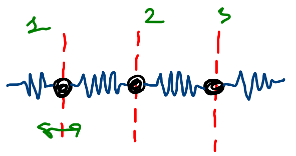
$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3$

$\Rightarrow$ Резонанс: резкое возраст-е амплит. установ. кол-й при $\Omega \to \omega_0$

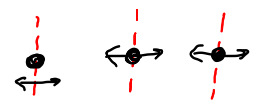
§ Распростран. кол-й в упругой среде. Упругие волны.

Упр. волна —

Среда



Вакуум



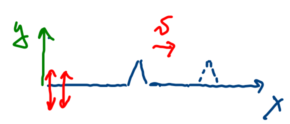
каждая частица свободно кол-ся

1^я начала колеб-ся ⇒ колеб-ся начнёт и 2^я → колеб. перейдёт на 3^ю и ...

⇒ в среде образуется упруг. волна

Различают: Продольные (частицы колебл. вдоль направл. распр. волны) и Поперечн. волны (частицы кол-ся ⊥ направл. распр.)

Волна в упругом шнуре



Поперечная

Звуковая волна

Скор-ть распр-я зависит от типа волны

$v_{\updownarrow} = \sqrt{\dfrac{G}{\rho}}$ $\qquad$ $v_{\leftrightarrow} = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

где: ρ – объёмн. плот-ть среды

G – модуль сдвига

E – модуль Юнга среды

Замеч-е! ...

Источник волны –

Волновое поле –

Фронт волны –

фронт волны – сфера ⇒ сфер. волна

... – цилиндр → цилиндр. волна

.. – плоскость → плоская волна

Волновая пов-ть –

Ск-ть волны –

§ Уравнение бегущей плоской волны («ур-е луча»).

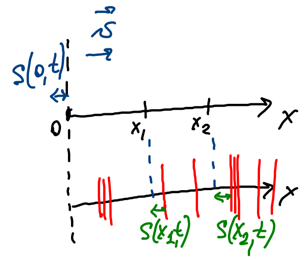
Рассм. упруг. плоск. волну, распростр-е по оси x

S – отклонение точки среды от полож. равнов-я

Отклон-е от полож-я равнов-я в источнике

$$S(0,t) = A\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$$

Пусть в среде отсут-т потери эн-и, и колеб-я распр-ся вдоль оси x со ск. v



$S(x,t)$ – отклон-е частиц среды с первоначальн. коорд-й x от своего полож-я равнов-я в момент времени t

Отклонение, кот. было в источнике в момент врем. t дойдет ч/з время $\tau = \frac{x}{v}$ до частицы с коорд-й x

⇒ в точке x в момент врем. t будет такое же отклон., какое было в источнике в момент времени $t' = t-\tau$

⇒ Отклон-е частиц в точке x в момент t есть:

$$S(x,t) = S(0,t') = A\cdot\cos(\omega(t-\tau)+\varphi_0) = A\cdot\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}+\varphi_0\right) \equiv A\cdot\cos(\omega t - k\cdot x+\varphi_0)$$

или
$$\left\{\begin{aligned} S(x,t) &= A\cdot\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right) \\ S(x,t) &= A\cdot\cos(\omega t - kx+\varphi_0)\end{aligned}\right.$$
– ур. бегущей волны ! или ур. луча

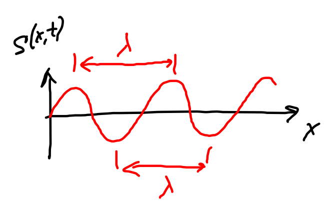
[бегущая в ⊕ направл. оси x]

где: $k \equiv \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{T\cdot v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ – «волновое число»

$$\boxed{k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

$\lambda = T\cdot v$ – расст-е, на кот. волна смещ-ся за период

~ длина волны



Если волна распр-ся в ~~произв-м~~ направл-и

$$S(\vec r,t) \equiv S(x,y,z,t) = A\cdot\cos(\omega t - \vec k\cdot\vec r+\varphi_0)$$!

где: $S(\vec r,t)$ – отклонение точек среды с координатой $\vec r$ от своего полож-я равн-я в момент t.

$\vec k = k\cdot\vec n$ $\quad$ $\vec n$ – ед. вектор, направл-й в сторону распр-я волны

$\vec k$ – волновой вектор

⇒ $\vec k = k\cdot\vec n = \left\{\begin{aligned} &|\vec k| = \frac{2\pi}{\lambda} \\ &\text{указ-т направл. распр-я волны}\end{aligned}\right.$

$\vec r = (x,y,z)$ $\quad$ $\vec k = (k_x,k_y,k_z)$

$\vec k\cdot\vec r \equiv k_x\cdot x + k_y\cdot y + k_z\cdot z$

⇒ k_x – проекция $\vec k$ на ось x

k_y – проекц. $\vec k$ на ось y

k_z – ... ... z