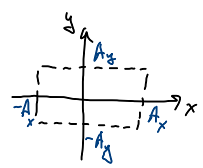
§ Сложение взаимно ⊥ колеб-й

Пусть „точка" участв-т в 2^x ⊥ процессах.

$x(t) = A_x \cdot \cos(\omega_x t + \varphi_x)$

$y(t) = A_y \cdot \cos(\omega_y t + \varphi_y)$



⇒ „точка" б. двиг-ся в прямоуг-ке, огранич-м A_x и A_y

Выбором нач. времени избавимся от одной начальн. фазы

⇒ $x(t) = A_x \cdot \cos \omega_x t$

$y(t) = A_y \cdot \cos(\omega_y t + \varphi_0)$

1] Пусть $\omega_x = \omega_y = \omega$

⇒ $x(t) = A_x \cdot \cos \omega t$

$y(t) = A_y \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$

исключим t: $\frac{x}{A_x} = \cos \omega t$ $\qquad \sin \omega t = \sqrt{1 - \cos^2 \omega t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_x^2}}$

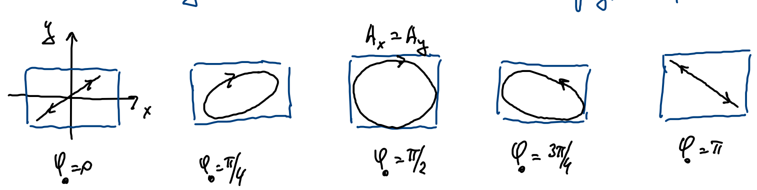
$\frac{y}{A_y} = \cos(\omega t + \varphi_0) = \cos \omega t \cdot \cos \varphi_0 - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_0$

$\frac{y}{A_y} = \frac{x}{A_x} \cdot \cos \varphi_0 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_x^2}} \cdot \sin \varphi_0$

$\left(\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x} \cdot \cos \varphi_0\right)^2 = \left(-\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_x^2}} \cdot \sin \varphi_0\right)^2$

...

$\frac{x^2}{A_x^2} - 2 \frac{x}{A_x} \cdot \frac{y}{A_y} \cdot \cos \varphi_0 + \frac{y^2}{A_y^2} = \sin^2 \varphi_0$ — общий вид ур. эллипса, оси кот-го ориентир-но произвольно, относит-но x, y



2] $\omega_x \neq \omega_y$

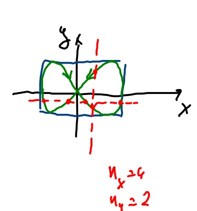
- результир. траект-я сложная
- не замкнут. траект.

Траект. б. замкнута, если отношение частот - целые или дробные числа

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = 1, 2, 3, \ldots$ $\qquad \frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4} \ldots$

⇒ фигуры Лиссажу

$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{1}{2}$



$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n_y}{n_x}$

n_y/n_x - число пересечений траектории с осью y (или x)

§ Затухающие колебания

– возник-т в системе за счёт диссипатив. сил

Найдём вид дифф. ур., описыв. затух. кол-я

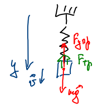
Пружинный маятник

– тело, массой m, колеблющ-ся под действ-м упругой силы $F_{упр} = -k \cdot x$

в среде с силой трения

$F_{тр} = -r \cdot \upsilon$

r – коэф. сопрот-я среды



в полож. равнов-я

$k \cdot \Delta l = m g$

$a = \frac{d^2y}{dt^2}$ $\quad \upsilon = \frac{dy}{dt}$

II з.Н. в проекц. на y:

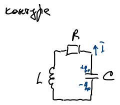
$$m a = \cancel{mg} - r \cdot \upsilon - k \cdot (\cancel{\Delta l} + y)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{r}{m} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$$

обознач.: $\frac{r}{m} \equiv 2\beta \qquad \frac{k}{m} \equiv \omega_0^2$ – частота свободных колеб-й (собственных)

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0}$$ – дифф. ур. затух. кол-й

Затух. колеб-я в колеб. контуре



по з. Ома: $\mathcal{E}_s = U_c + U_R$

$$-L \frac{dI}{dt} = \frac{q}{C} + I \cdot R$$

$$\Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q = 0$$

$I = \frac{dq}{dt}$

если: $\frac{R}{L} \equiv 2\beta \qquad \frac{1}{LC} \equiv \omega_0^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 \cdot q = 0}$$ – ДУ затух. кол-й

$S \equiv \{x, q, \ldots\}$

Итак, ДУ затух. колеб-й для величины S:

$$\boxed{\frac{d^2S}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dS}{dt} + \omega_0^2 \cdot S = 0} \; ! \quad (*)$$

где: β – коэф-т затухания $\quad \omega_0$ – частота собств. кол-й

Реш-е (*) в виде: $S(t) = A(t) \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$
ищется

подставив в (*)

$$\Rightarrow A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \; ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

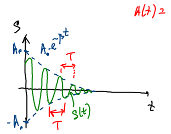
$$\Rightarrow S(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$$ – реш-е (*) !

где: A_0, φ_0 – постоянные, кот. нах-ся из нач. усл-й

A_0 – начальн. амплит.

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – частота затухающих кол-й

$A(t) = A_0 \cdot e^{-\beta t}$ – амплитуда затух. кол-й



Видно;

а) β опред-т крутизну спада амплитуды

б) При слабом затухании м. использовать понятие периода, как промеж. врем. м/у 2-мя послед. MAX (MIN)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Параметры, характ. затух. кол-я

1] Время релаксации (τ) – промеж. времени в течен. кот. ампл. кол-й уменьш. в e-раз

$$\frac{A(t)}{e} = A(t + \tau) \Rightarrow \frac{\cancel{A_0} \cdot e^{-\beta \cancel{t}}}{e} = \cancel{A_0} \cdot e^{-\beta(\cancel{t} + \tau)} \Rightarrow \beta\tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}$$

если $\beta \to \infty \Rightarrow \tau \to 0 \Rightarrow$ быстрозатухающие кол-я

$\beta \to 0 \Rightarrow \tau \to \infty \Rightarrow$ кол-я бесконечны

2] Логарифмическ. декремент затух-я $\quad \Theta$ или λ

$$\Theta \equiv \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{\cancel{A_0} \cdot e^{-\beta \cancel{t}}}{\cancel{A_0} \cdot e^{-\beta(\cancel{t} + T)}} = \ln \frac{1}{e^{-\beta T}} = \beta \cdot T$$

$$\Theta \equiv \beta \cdot T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau / T} = \frac{1}{N_e}$$

где: N_e – число кол-й, совершаемых за время уменьш-я амплитуды в e-раз

3] Полная эн. колеб-й:

$$\beta << \omega_0 \Rightarrow E = E_k + E_p \approx \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 \cdot A_0^2}{2} \cdot e^{-2\beta t} \equiv E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

$$\boxed{E = E_0 \cdot e^{-2\beta t}}$$

$E_0 = \frac{m \omega_0^2 A_0^2}{2}$ – нач. эн-я затух. кол-й

4] Добротность (Q)

– отнош-е эн., запасён. в системе в данный в данный t к убыли этой эн-и з/а период

$$Q = 2\pi \cdot \frac{E(t)}{(-\Delta E)}$$

т.к. $E(t) = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$

$$\frac{dE}{dt} = -E_0 \cdot 2\beta \cdot e^{-2\beta t} \Rightarrow dE = -2\beta E_0 \cdot e^{-2\beta t} \cdot dt$$

предполагая: $dt \approx T = \Delta t \Rightarrow \Delta E \approx -2\beta E_0 \cdot e^{-2\beta t} \cdot T$

$$\Rightarrow Q = 2\pi \cdot \frac{\cancel{E_0} \cdot \cancel{e^{-2\beta t}}}{-(-2\beta \cancel{E_0} \cdot T \cdot \cancel{e^{-2\beta t}})} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\Theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{Q = \frac{\pi}{\Theta}} \; !$$

§ Вынужденные колеб-я. Резонанс.

– Возн-т под дейст-м периодической вынужд-й силы

Пусть $F_{вын.} = F_0 \cdot \cos \Omega t$

Внеш. сила дейст-т по гармон. закону

Ω – частота вынужд. силы

F_0 – амплитуда вын. силы

\# Пружин. маятник = тело в среде, колеблющ-ся под дейст-м $F_{вын}$

II з Н:
$$ma = \underbrace{-k \cdot x}_{F_{упр}} \underbrace{- r \cdot \upsilon_x}_{F_{сопр}} + \underbrace{F_0 \cdot \cos \Omega t}_{F_{вын}}$$

или
$$m\ddot{x} + r \cdot \upsilon_x + k \cdot x = F_0 \cdot \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \underbrace{\frac{r}{m}}_{2\beta} \cdot \dot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} \cdot x = \underbrace{\frac{F_0}{m}}_{f_0} \cdot \cos \Omega t$$

!
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 \cdot x = f_0 \cdot \cos \Omega t}$$
ДУ вынужден. кол-й