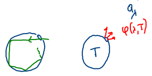
Тепловое изл-е

Γ_λ $\quad a_\lambda$ $\qquad \frac{\Gamma_\lambda}{a_\lambda} = \varphi(\lambda, T)$ $\qquad a_\lambda = 1$ (абс. черн. тело)

$\Gamma_\lambda^{\text{а.ч.т.}} = \varphi(\lambda, T)$



– зак. Вина (I з. Вина)

$\lambda_m = \frac{b}{T}$

– II з. Вина:

$\varphi_m = C \cdot T^5$

где: $C = 1{,}29 \cdot 10^{-5} \frac{Вт}{м^3 К^5}$

$$R = \int_0^\infty \Gamma_\lambda^{\text{а.ч.т.}} d\lambda = \sigma \cdot T^4$$

$$\boxed{R = \sigma \cdot T^4}$$ – з. Ст.-Больц.

§ Объёмная плотность эн-и тепл. изл-я

Объёмная пл-ть эн. (ранее): $w = \frac{dW}{dV}$ $\qquad [w] = \frac{Дж}{м^3}$ $\qquad \omega$ – частота изл-я

Переобозначу: $\Rightarrow$ $\vartheta \equiv w = \frac{dW}{dV}$ – объёмн. пл. эн.

ω – частота

$\Rightarrow$ Спектр. плот-ть тепл. изл-я:

$$u(\omega, T) \equiv \frac{d\vartheta}{d\omega}$$

объём. пл. эн.

интервал частот

$$u(\lambda, T) \equiv \frac{d\vartheta}{d\lambda}$$

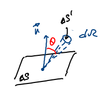
$$\vartheta = \int_0^\infty u(\omega, T)\, d\omega$$

$R \sim \vartheta$

$\Gamma \sim u(\lambda, T)$

Средняя плотность потока эн-и (э/м волны): $I = c \cdot \vartheta$

Рассм. изл-е от эл-та пов-ти ΔS тела, в направлении телесн. угла $d\Omega$:



$d\Omega = \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi$

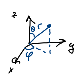
$d\Omega = \frac{dS'}{r^2}$

мощность посыл-й эн-и: $dP = \frac{dW}{dt} = dI \cdot \Delta S'$

где: dI – излуч-е в попер-е $d\Omega$

т.к. тепл. излуч-е изотропно $\Rightarrow$ $\alpha \equiv \frac{dI}{d\Omega} = \frac{I}{4\pi}$ $\Rightarrow$ $dI = \frac{I}{4\pi} \cdot d\Omega$

$\Delta S' = \Delta S \cdot \cos\theta$



$\Rightarrow$ $dP = \frac{I}{4\pi} \cdot \sin\theta \cdot d\theta \cdot d\varphi \cdot \Delta S'$

$\Rightarrow$ Мощность излуч-я посылаемая в $1^{\text{ну}}$ сторону от пов-ти:

$0 \le \varphi \le 2\pi$ $\qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\Delta P = \int dP = \frac{c \cdot \vartheta}{4\pi} \cdot \Delta S \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot d\theta}_{1/2} = \frac{\pi}{4\pi} \cdot c \cdot \vartheta \cdot \Delta S$$

$$\Rightarrow R \equiv \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta S \cdot \Delta t} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} = \frac{c}{4} \cdot \vartheta$$

$$\Rightarrow R = \frac{c}{4} \cdot \vartheta \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\frac{dR}{d\lambda}}_{\Gamma_\lambda} = \frac{c}{4} \cdot \underbrace{\frac{d\vartheta}{d\lambda}}_{u(\lambda,T)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Gamma_\lambda = \frac{c}{4} \cdot u(\lambda, T)}$$

Γ_λ – спектр. излуч. спос-ть ("от тела")

$u(\lambda, T)$ – спект. объёмн. пл-ть эн. ("в полости")

аналогично:

$$\boxed{f(\omega, T) = \frac{c}{4} \cdot u(\omega, T)}$$

c – ск. света

Основн. проблема – найти $u(\lambda, T)$ или $u(\omega, T)$

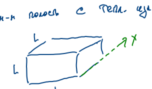
Рэлей Идея:

- Стенки полости – система гарм. осцил-в, излуч-х эн-ю
- \+ зак. о равнораспр. эн. по степ. свобод.
- \+ зеркальное отраж-е э/м волн на стенке полости

$\Rightarrow$ Равновесн. тепл. изл-е $\sim$ кол-во стоячих волн в полости

$d\vartheta = dn_\omega \cdot \langle \varepsilon \rangle$ $\qquad dn_\omega$ – кол-во стоячих волн, частоты кот-х $\omega \div \omega + d\omega$

Рассм-м полость с тепл. изл-м. Пусть полость – куб



Усл-е образ-я стоячей волны по X: $L_x = \frac{\lambda}{2} \cdot n$

где: λ – длина бегущей волны

$\begin{cases} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ L_x = L \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $L = \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{n}{2}$ $\Rightarrow$ $k \cdot L = \pi \cdot n$

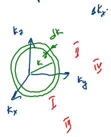
$n \in \mathbb{Z}$ – целое число

$\Rightarrow$ Усл-е $\exists$ стоян. волн в кубе:

3D: $k_x \cdot L = \pi \cdot n_x$ $\qquad k_y \cdot L = \pi \cdot n_y$ $\qquad k_z \cdot L = \pi \cdot n_z$ $\qquad \vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

$\Rightarrow$ В простр-ве век-в k на 1 стоян. волну приходится:

$$\Delta k_x \cdot \Delta k_y \cdot \Delta k_z = \frac{\pi \cdot \Delta n_x}{L} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta n_y}{L} \cdot \frac{\pi \cdot \Delta n_z}{L} = \frac{\pi}{L} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot 1 = \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 = \frac{\pi^3}{L^3}$$



$\Rightarrow$ Число бегущих волн dN_k с волн. числами в интервале $k \div k + dk$

$$dN_k = \frac{4\pi k^2 \cdot dk}{\frac{\pi^3}{L^3}}$$

$\Rightarrow$ Число стоячих волн

$$dN_k = \frac{4\pi k^2 \cdot dk}{\frac{\pi^3}{L^3}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{8 квадрантов}} \cdot \overbrace{2}^{\text{учёт поляриз-и}}$$

число стоячих волн в ед. объёма: $\Rightarrow$ $\frac{dN_k}{L^3} = \frac{k^2 \cdot dk}{\pi^2}$

т.к. $k = \frac{\omega}{c}$ $\Rightarrow$ $\frac{dN_\omega}{L^3} = \frac{\omega^2 \cdot d\omega}{\pi^2 c^3}$ – число стоян. волн. в ед. объёма, частоты кот. нах-ся $\omega \div \omega + d\omega$

(см. Савельев, т. 5 § 1.5)

Число мод = число стоян. волн = число колеб-й

$\Rightarrow$ Если на $1^{\text{ну}}$ моду кол-й приход-ся эн-я $\langle \varepsilon \rangle$

$\Rightarrow$ объём. плотн-ть эн. изл-я: $d\vartheta = \frac{dN_\omega}{L^3} \cdot \langle \varepsilon \rangle = \frac{\omega^2 \cdot d\omega \cdot \langle \varepsilon \rangle}{\pi^2 c^3}$

$\Rightarrow$ Спектр. пл-ть эн.: $u_\omega = \frac{d\vartheta}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \langle \varepsilon \rangle$

§ Формула Рэлея-Джинса

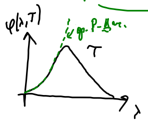
1900 г. Рэлей предложил, Джинс обосновал

$\forall$ колеб-е – 2 т/д степ. своб. $\Rightarrow$ $\langle \varepsilon \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT = kT$

по гипотезе о равнорасп. эн-и по ст. своб.

$$\Rightarrow \boxed{u(\omega,T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot kT} \text{ – ф. Рэлея-Дж.}$$

$u(\omega,T) \to u(\lambda,T)$



$$\Rightarrow \quad w = \int_0^\infty u(\omega,T)\, d\omega = \infty$$

– УФ катастрофа!

т.е. вся эн. системы д. перейти в эн. излуч-я!!!

< этого нет! >

§ ф. Планка

14 дек. 1900 г. Планк (доклад в немецк. ун-те:) гипотеза:

1. Эн. гармон. осцил. м. принимать не произв-е, а избран-е знач-я, образ-е дискретный ряд:

$0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_0, 3\varepsilon_0, \ldots \; n \cdot \varepsilon_0$

$\varepsilon_n = n \cdot \hbar\omega$ где: $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ $n = 0, 1, 2, \ldots$

где: $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с – пост. Планка.

\+ Вероят-ть того, что осцил-р („стоячая волна") нах-ся в сост-и с эн-ей ε_n опис-ся статист. Больцмана:

$$P_n = A \cdot e^{-\varepsilon_n / kT}$$

$A = const$, из усл-я нор-ки: $\sum P_n = 1$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}}$$

$\Rightarrow$ Средн. эн. всех осцил-в:

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot \varepsilon_n = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cdot e^{-\varepsilon_n/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\varepsilon_n/kT}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \hbar\omega \cdot e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n\hbar\omega}{kT}}} =$$

$$= \left[\frac{\hbar\omega}{kT} \equiv x \right] = \hbar\omega \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot e^{-n x}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n x}} = -\hbar\omega \cdot \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} \right) \right]$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \ldots = \left[\begin{array}{l} \text{геометр.} \\ \text{прогрессия} \\ \text{со знамен-м} \\ e^{-x} < 1 \end{array} \right] = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

$$\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = -\hbar\omega \cdot \frac{d}{dx} \ln \frac{1}{1 - e^{-x}} = \hbar\omega \cdot \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} = \frac{\hbar\omega}{e^{x} - 1} = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \quad !$$

заметим: $\hbar \to 0$ $\Rightarrow e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} \simeq 1 + \frac{\hbar\omega}{kT}$ $\Rightarrow \langle \varepsilon \rangle = \frac{\hbar\omega}{1 + \frac{\hbar\omega}{kT} - 1} = kT$

$\Rightarrow$ равновесная объемн. пл-ть излуч-я:

$$u(\omega,T) = \langle \varepsilon \rangle \cdot \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

$$\Rightarrow f(\omega,T) = \frac{c}{4} \cdot u(\omega,T) = \frac{\hbar\omega^3}{4\pi^2 c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

или

$$\varphi(\lambda,T) = \frac{4\pi^2 \hbar c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar c}{kT\lambda}} - 1}$$

– точно совпадает с эксп-м !

$$\Rightarrow \underline{R} = \int_0^\infty f(\omega,T)\, d\omega = \ldots = \underbrace{\frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}}_{\sigma} \cdot T^4 = \underline{\underline{\sigma \cdot T^4}}$$

$\Rightarrow \sigma = \ldots$

$$\left. \frac{d\varphi}{d\lambda} \right|_{\lambda_m} = 0 \Rightarrow \lambda_m = \underbrace{\frac{2\pi\hbar c}{4{,}965 \cdot k}}_{b} \cdot \frac{1}{T} = \frac{b}{T}$$

$b = \ldots$