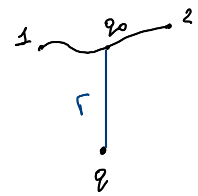
§ Потенциал

$$A = \frac{kq_0q}{r_1} - \frac{kq_0q}{r_2} = W_{п_1} - W_{п_2}$$

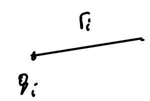
$$\Rightarrow \quad W_п = \frac{kq_0q}{r}$$



Потенциал:

$$\varphi = \frac{W_п}{q_0} \Rightarrow$$ потенц. точечн. заряда $$\varphi_i = k\frac{q_i}{r_i}$$

Потенц., создан-й системой $q_1 \dots q_N$

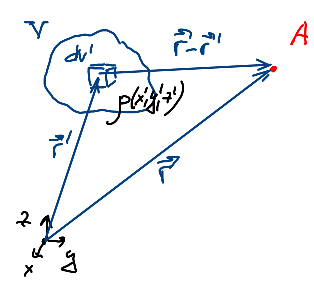


$$\varphi = \sum_i \varphi_i$$

Если заряд распред-н непрерывно по объему V с объемн. плотн-тью $\rho(x,y,z)$ $\Rightarrow$ объем м. разбить на малые кусочки

$$dq = \rho\, dV$$

$$\sum_i \frac{q_i}{r_i} \to \int_V \frac{dq}{r}$$



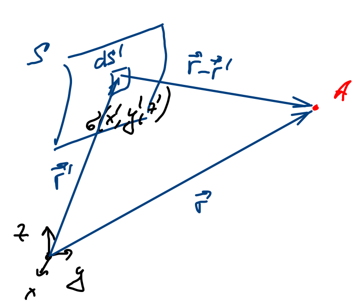
$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = \int_V \frac{k\cdot dq}{r} = \int \frac{k\cdot\rho(x',y',z')\cdot dV'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

где: $\vec{r} = (x,y,z)$ – рад. вектор т. A

$\vec{r}\,' = (x',y',z')$ – рад. вектор кусочка объема dV с зарядом dq

Если заряд распред-н по пов-ти S с поверхн. плотн. заряда $\sigma = \frac{dq}{dS}$

$$\Rightarrow \sum_i \frac{q_i}{r_i} \to \int_S \frac{\sigma\, dS}{r}$$

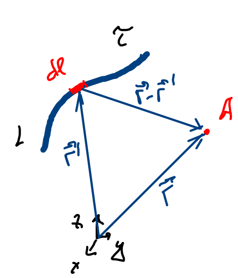


$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = k\cdot\int_S \frac{\sigma(x',y',z')\cdot dS'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Если заряд распред-н с линейн. плот-тью заряда

$$\tau = \frac{dq}{dl}$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y,z) = k\cdot\int_L \frac{\tau(\vec{r}\,')\cdot dl'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$



§ Энергия вз-я системы зарядов

$q_1, q_2 \dots q_N$ (точечные)

Эн. вз-я такой системы зарядов = сумме эн-й вз-я взятых попарно

$$\Rightarrow W_п = \sum_{(i \neq k)} W_{п_{ik}}$$

где: $W_{п_{ik}} = k \cdot \frac{q_i \cdot q_k}{r_{ik}}$ – пот. эн. вз-я м/у q_i и q_k зарядами, находящ-ся на расст-и r_{ik}

$$\Rightarrow W_п = \sum_{(i \neq k)} \frac{k \cdot q_i \cdot q_k}{r_{ik}} = \dots = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} q_i \sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} \frac{k \cdot q_k}{r_{ik}}$$

Но $\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^{N} k \frac{q_k}{r_{ik}} \equiv \varphi_i$ – потенциал, созданный всеми зарядами, кроме q_i, в точке нахождения заряда q_i

$\Rightarrow$ Эн. вз-я системы зарядов:

$$\boxed{W_п = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \varphi_i}$$!

§ Связь м/у напряж-тью эл. поля и потенц-м.

$\vec E$ – характ. силу, действ. на заряд
φ – характ. эн-ю заряда
} есть ли м/у ними связь?

Механика: связь м/у $\vec F$ и $W_п$:

$$\vec F = -\text{grad}\, W_п \equiv -\vec\nabla W_п \qquad \vec\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\vec i + \frac{\partial}{\partial y}\vec j + \frac{\partial}{\partial z}\vec k$$

Но: $\vec F = q\cdot\vec E$; $W_п = q\cdot\varphi$

$$\Rightarrow \cancel{q}\cdot\vec E = -\vec\nabla(q\cdot\varphi) = -\cancel{q}\cdot\vec\nabla\varphi$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec E = -\vec\nabla\varphi = -\text{grad}\,\varphi}$$

⇒ линии напряж-ти $\vec E$ эл. поля направлены в сторону наискорейшего убывания потенциала!

$$\vec E = -\vec\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\hat i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\hat j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\hat k\right)$$

⇒ по аналогии: проекция $\vec E$ на произвольн. направл-е, заданная $d\vec l$:

$$\vec E\cdot d\vec l = -d\varphi \Rightarrow E_l\cdot dl = -d\varphi$$

$$\Rightarrow E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$$

⇒ проекция $\vec E$ на направл-е $d\vec l$ равна производной φ по l

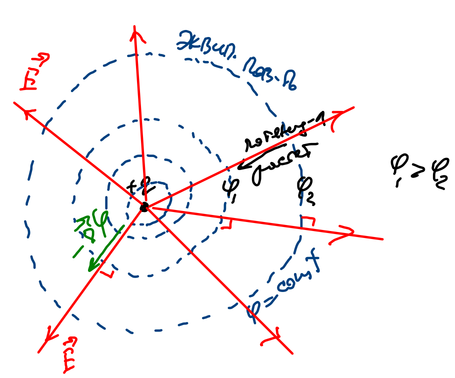
где: E_l – проекция $\vec E$ на направление заданное $d\vec l$.

Точечный заряд:

$\varphi = k\frac{q}{r}$ ⇒ $|\vec r_1| = |\vec r_2| = const$
⇒ $\varphi_1 = \varphi_2 = const$

Опр: эквипотенц. пов-ть – ...

⇒ эквип. пов-ти точечн. заряда – окружности



⇒ $\vec E \perp$ эквипот. поверхн-м. и указ-т направл-е наискор-й убыли потенц-ла φ

Удобно запомн.:

$$\vec E = -\text{grad}\,\varphi \equiv -\vec\nabla\varphi$$

$$\text{div}\,\vec E = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \equiv (\vec\nabla, \vec E)$$

$$\text{rot}\,\vec E \equiv [\vec\nabla, \vec E] = \begin{vmatrix} \hat i & \hat j & \hat k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

§ Общая задача электростатики

~ отыск-е $\vec{E}$ и φ по известному распр-ю $\rho(x,y,z)$

т. Гаусса в диф. форме:

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi k\cdot\rho$$

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\Rightarrow -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = 4\pi k\cdot\rho$$

$$-\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = (\vec{\nabla},\vec{E}) = -(\vec{\nabla},\vec{\nabla}\varphi) = -(\vec{\nabla},\vec{\nabla})\varphi = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi = -\Delta\varphi$$

Δ

$$\nabla^2 \equiv \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ – опер. Лапласа

т. Гаусса $\Rightarrow -\Delta\varphi = 4\pi k\rho$

$$\Delta\varphi = -4\pi k\cdot\rho$$ или $$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = -4\pi k\cdot\rho(x,y,z)$$ – ур. Пуассона. !

зная $\rho(x,y,z) \to \varphi(x,y,z) \to \vec{E}$

если $\rho=0 \Rightarrow$ $\Delta\varphi = 0$ – ур. Лапласа !

Глава: Эл. поле в веществе

§ Введение

$\vec{E}$ – макрополе – усреднённое микрополе

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_{макр} = \frac{1}{\Delta V} \cdot \int\limits_{\Delta V} \vec{E}_{микро} \cdot dV$$

ΔV – физический беск. малый объём

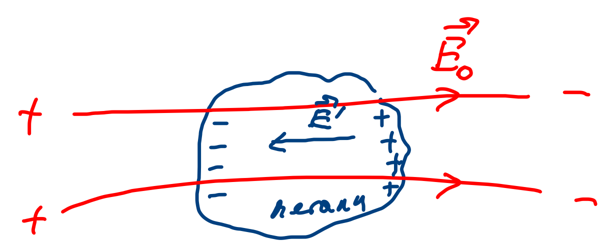
Вещества: проводники, полупров-ки, диэл-ки.

Вне зав-ти от мех-ма индуциров-я зарядов поле в в-ве есть суперпоз-я внешнего $\vec{E}_0$ и внутреннего $\vec{E}'$ полей.

§ Проводники в эл. поле

Проводники → металлы → много свобод. эл-в, беспорядоч. движ.

распред-е зарядов в. пров-в до компенсации внеш. поля



$E = E'$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

⇒ Внутри провод-ка эл. поля НЕТ !

т.к. $E = 0$ внутри ⇒ объёмн. плот-ть зарядов $\rho = 0$

⇒ индуцир. заряды появл-ся только у пов-ти с поверхн. плот-тью σ