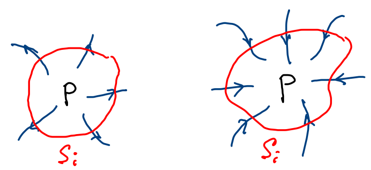
§ Т. Гаусса в диф. форме. Дивергенция

$$\operatorname{div}\vec{E} = \lim \frac{\oint_{S_i} \vec{E}\cdot d\vec{S}}{V_i}$$

т. Гаусса в диф. форме:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi k\cdot\rho}$$



Рассм-м P, в окр-ти кот. начин-ся либо оканчив-ся линии поля

$$\operatorname{div}\vec{E} \equiv \lim_{V_i\to 0} \frac{1}{V_i}\oint_{S_i}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \lim_{V_i\to 0}\frac{\Phi_E}{V_i}$$

Но $\oint_{S_i}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_{S_i} E\cdot dS\cdot\cos\alpha = \oint_{S_i} E\cdot dS_\perp = \oint_{S_i} \gamma\cdot dS_\perp = \Delta N_i$

густота линий напр-ти

ΔN_i – кол-во линий $\vec{E}$, пересек-х площадь S_i

$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = \lim_{V_i\to 0}\frac{\Delta N_i}{V_i}$ $\Rightarrow$ Диверг-ей вект. поля $\vec{E}$ в т. P наз. вел-на, численно равная плотности точек в кот-х начин-ся либо оканч-ся линии поля $\vec{E}$

т. Гаусса в диф. ф.:

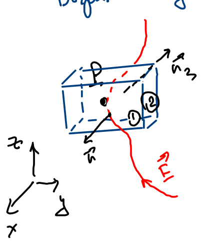
$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi k\cdot\rho$$

$\Rightarrow \frac{\Delta N}{V_i} \sim \frac{\Delta q}{V_i}$ $\Rightarrow \Delta N \sim \Delta q$

$\Rightarrow$ Заряды явл. источниками линий $\vec{E}$

точки на кот-х начин-ся $\vec{E}$ – „истоки"
на кот. заканчив-ся – „стоки" !

Выраж-е для дивергенции в ДСК.



S – пов-ть вокруг т. P – куб со сторонами $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

Поток $\vec{E}$ ч/з 1 грань: $-E_{1x}\cdot\Delta y\cdot\Delta z$

где: E_{1x} – среднее знач-е $\vec{E}$ на грани 1

Поток $\vec{E}$ ч/з 2 грань: $E_{2x}\cdot\Delta y\cdot\Delta z$

Суммарн. поток ч/з 1 и 2 грань:

$$E_{2x}\cdot\Delta y\cdot\Delta z - E_{1x}\cdot\Delta y\cdot\Delta z = (E_{2x}-E_{1x})\cdot\Delta y\cdot\Delta z = \left[\begin{array}{l}\text{грани близки др. к другу}\\ E_{2x} = E_{1x} + \frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\Delta x\end{array}\right] =$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial x}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$$

Аналогично потоки $\vec{E}$ ч/з грани $\perp$ оси y: $\frac{\partial E_y}{\partial y}\cdot\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z$ и оси z...

$$\Rightarrow \operatorname{div}\vec{E} = \lim_{V\to 0}\frac{\Phi_E}{V} = \lim_{V\to 0}\left\{\frac{\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\cdot\cancel{\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z}}{\cancel{\Delta x\cdot\Delta y\cdot\Delta z}}\right\} = \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

ранее вводили опер-р „набла": $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}$ $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + \ldots$

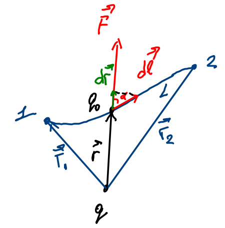
$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

---

§ Потенциальность эл. статическ. поля

Пусть идёт перенос q_0 в поле заряда q вдоль произвольн. траек-и L м/у т. 1 и т. 2

Работа $\vec F$ на бесконечно малом („элементарном") перемещении $d\vec l$ равна:



$$dA = \vec F \cdot d\vec l = \left| \vec E = \frac{\vec F}{q_0} \right| = q_0 \cdot \vec E \cdot d\vec l = \left| \vec E = k\frac{q}{r^2}\cdot\frac{\vec r}{r} \right|$$

$$\Rightarrow \quad dA = k \cdot q_0 \cdot q \cdot \frac{\vec r}{r^3} \cdot d\vec l$$

$$\vec r \cdot d\vec l = |\vec r| \cdot |d\vec l| \cdot \cos\alpha = |\vec r| \cdot |d\vec r| \equiv r \cdot dr$$

$$\Rightarrow \quad dA = k\, q_0 q \frac{r \cdot dr}{r^3} = k \cdot \frac{q_0 \cdot q \cdot dr}{r^2}$$

$\Rightarrow$ Полная работа по траектории L:

$$\Delta A = \int_L dA = \int_L \vec F d\vec l = \int_{r_1}^{r_2} \frac{k\, q_0 \cdot q \cdot dr}{r^2} = k q_0 q \left(\frac{-1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{k q_0 q}{r_1} - \frac{k q_0 q}{r_2}$$

– не зависит от пути траек-и $\Rightarrow$ эл. стат. поле консервативно

Теорема об измен. потенц. эн-и: $\Delta A = -\Delta W_п$ $\longrightarrow$ $W_п$ – потенц. эн-я

$\Delta A = W_{п_1} - W_{п_2}$

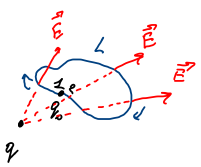
$$\Rightarrow \quad W_п = \frac{k q_0 q}{r} + const$$

часто требуют: $W_п(r \to \infty) \to 0$ $\Rightarrow$ $const = 0$!

$$\Rightarrow \quad W_п = \frac{k \cdot q_0 \cdot q}{r}$$

„Си" $W_п = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 \cdot q}{r}$ $\qquad \Delta A = W_{п_1} - W_{п_2}$

$\Rightarrow$ Работа по замкнутому контуру L



$$\Delta A = W_{п_1} - W_{п_1} = 0 = \oint_L \vec F d\vec l = q_0 \cdot \oint_L \vec E d\vec l$$

$$\Rightarrow \quad \oint_L \vec E \cdot d\vec l = 0 \quad \Longleftrightarrow$$ „циркуляция $\vec E$ по замкнут. контуру равна нулю"

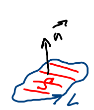
Опр: Векторное поле в кот-м
1) работа сил поля не зависит от пути
2) работа по $\forall$ замкн. контуру $= 0$

наз. **потенциальным**

$\Rightarrow$ эл. статическ. поле потенц-но !!!

матем-ки: $\oint_L \vec E \cdot d\vec l = 0$

$\Rightarrow$ линии $\vec E$ не замкнуты !



из математики: $\oint_L \vec E \cdot d\vec l = \int_S rot\,\vec E \cdot d\vec s$ „ротор напр-ти"

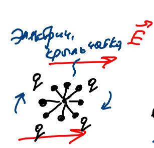
S – пов-ть натянутая на контур L

$\vec n$ связан с направл. обхода L по „правому винту"

$$\oint \vec E \cdot d\vec l = 0 = \int_S rot\,\vec E \cdot d\vec s$$

д. выпол-ся для $\forall S$ $\Rightarrow$ для эл. стат. поля $rot\,\vec E = 0$

$\Rightarrow$ эл. стат. поля „безвихревое поле" !



если $rot\,\vec E \neq 0$ электрич. крыльчатка вращается

§ Потенциал

$W_п = k\dfrac{q_0 q}{r}$ – потенц. эн. заряда q_0 в поле заряда q – входят заряд, созд. поле и заряд, взаимод-й с полем. ⇒ Для хар-ки только поля ...

... вводят „потенциал":

$$\varphi \equiv \frac{W_п}{q_0}$$

$q_0 = 1 \Rightarrow \varphi = W_п \Rightarrow$ Потенциал – ...

φ – описывает св-ва эл. поля

Зная потен-л φ в некот. точке

$\Rightarrow W_п = q_0 \cdot \varphi$

$$\Rightarrow A = -\Delta W_п = W_{п_1} - W_{п_2} = q_0 \cdot \varphi_1 - q_0 \cdot \varphi_2 = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = -q_0 \cdot \Delta\varphi$$

$\Rightarrow A = q_0 \cdot (-\Delta\varphi)$ → совершаемая работа связана с убылью $(-\Delta\varphi)$ потенц-ла!

Для точечн. заряда:

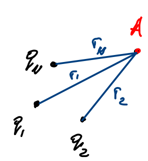
$$\varphi = \frac{W_п}{q_0} = \frac{\frac{k q_0 q}{r}}{q_0} = k \cdot \frac{q}{r}$$ – потенц., создав-й точечным q в точке, определяемой $\vec{r}$

Си: $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{q}{r}$ $\qquad [\varphi] = \left[\dfrac{W_п}{q}\right] = \dfrac{Дж}{Кл} = В$ „вольт"

СГС: $\varphi = \dfrac{q}{r}$ $\qquad [\varphi_{сгс}] = СГС_{ед. потенциала}$

$$1 В = \frac{10^7 эрг}{3 \cdot 10^9 СГС_q} = \frac{1}{300} СГС_{ед. потенц.}$$

Пусть поле создано N точечн. зарядами q_1 q_2 ... q_N



$r_1, r_2, \ldots r_N$ – расст-я от q_i до т. A

Пусть в поле, создан-м сист. зарядов, переносится q'

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i$$

где: $A_i = \dfrac{k\, q_i \cdot q'}{r_{i_1}} - \dfrac{k \cdot q_i \cdot q'}{r_{i_2}}$ $\qquad r_{i_1}$ – расст-е от q_i до начального полож-я q'

r_{i_2} – .... до конечного пол-я q'

$$A = \sum_{i=1}^{N} A_i = k\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot q'}{r_{i_1}} - k \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot q'}{r_{i_2}} = W_{п_1} - W_{п_2}$$

⇒ Потенц. эн. заряда q' в поле системы зарядов q_1 q_2 .. q_N есть:

$$W_п = k \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i \cdot q'}{r_i}$$

$\Rightarrow \varphi \equiv \dfrac{W_п}{q'} = k\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$ ⇒ Потенциал поля системы зарядов равен алг. сумме пот-в, создав-х каждым из зарядов в отдельности.

$\Rightarrow \varphi = \displaystyle\sum_i \varphi_i$ $\quad$ где: $\varphi_i = \dfrac{k \cdot q_i}{r_i}$

!