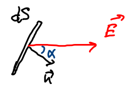
§ Теорема Гаусса. Поток вектора напряж-ти

Поток ч/з площадку dS

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot dS\cdot\cos\alpha = E_n dS = E\cdot dS_\perp$$

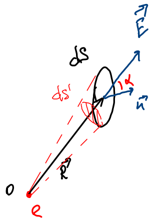


Поток ч/з произвольн. пов-ть S:

$$\Phi_E = \int d\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

Поток ч/з dS:

$$d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}\cdot\vec{n}\cdot dS = k\frac{e}{R^2}\cdot\cos(\vec{R},\vec{n})\cdot dS$$



$$\vec{E} = k\frac{e}{R^2}\cdot\vec{R}$$

$$\cos(\widehat{\vec{R},\vec{n}}) = \cos\alpha$$

$$\cos(\vec{R},\vec{n})\cdot dS = \pm dS'$$

где: dS' – абсолютн. величина $\perp$-ой к $\vec{R}$ проекции dS

dS' совпадает с эл-м шаровой пов-ти радиуса R с центром в т. O

$\Rightarrow$ dS' м.б. выражена ч/з телесный угол $d\Omega$

$$d\Omega = \frac{dS'}{R^2} = \pm\frac{\cos(\widehat{\vec{R},\vec{n}})\cdot dS}{R^2}$$

(+) берём, если из точки наблюд. видна внутрен. сторона пов-ти dS

Телесный угол – угол, под кот-м видно тело из точки наблюд-я

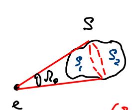
$$\Rightarrow\quad d\Phi_E = \vec{E}\cdot d\vec{S} = k\frac{e}{R^2}\cdot\cos(\vec{R},\vec{n})\cdot dS = \pm k\cdot e\cdot d\Omega$$

$\Rightarrow$ Если взять замкнутую пов-ть S, охват. заряд e

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \pm\oint k\cdot e\cdot \underbrace{d\Omega}_{4\pi} \Bigg|_{\text{внутрен. сторона пов-ти}} = k\cdot e\cdot 4\pi$$

Если заряд e вне пов-ти

$$\oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \int_{S_1}\ldots + \int_{S_2}\ldots = -k\cdot e\cdot\Omega_0 + k\cdot e\cdot\Omega_0 = 0$$

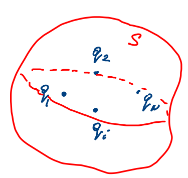


S_1: $\cos(\vec{R},\vec{n}) < 0$

S_2: $\cos(\vec{R},\vec{n}) \geq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi k\cdot e & \text{– если пов-ть } S \text{ охват-т заряд } e \\ \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = 0 & \text{– если пов-ть } S \text{ не охват-т заряд } e \end{cases}$$

Пусть пов/х-ть охват-т N – зарядов q_i



$q_i = \pm N_i\cdot e$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\,d\vec{S} = \oint_S \sum_i \vec{E}_i\,d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i\,d\vec{S} =$$

$$= \left\{\text{каждый заряд создает свой поток}\right\} = \sum_i k\cdot 4\pi\cdot q_i = 4\pi k\cdot\sum_i q_i$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\cdot k\cdot\sum_i q_i$$ – т. Гаусса !

...

Си: $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$$

СГС: $$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi\cdot\sum_i q_i$$

Если заряды распределены непрерывно внутри S

$\Rightarrow$ вводят $\rho = \frac{dq}{dV}$ – объёмная плотность заряда

$$\Rightarrow \sum_i q_i = \int_V \rho\,dV$$ где: V – объём, ограниченный пов-тью S

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi k\cdot\int_V \rho\cdot dV$$ – т. Гаусса для непрерывн. распред. зарядов

§ Вычисление эл. полей с помощью т. Гаусса

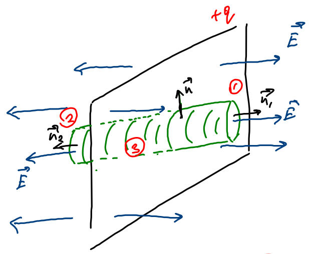
1] Поле равномерно заряженной плоскости

S – цилиндрич. пов-ть

$\Rightarrow \oint\limits_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int\limits_{S_1} ... + \int\limits_{S_2} ... + \int\limits_{S_3} ... =$

$= E\cdot S_1 + E\cdot S_2 + E\cdot S_3 \cdot \cancel{\cos\alpha}^{0} =$

$= \{S_1 = S_2\} = 2E\cdot S$



Поверхн. плот-ть заряда

$\sigma = \frac{dq}{dS} = const$

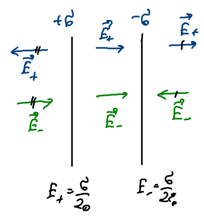
Внутри цилиндр. пов-ти: $q = \int dq = \sigma\cdot S$

т. Гаусса $\Rightarrow$ $2\cdot E\cdot \cancel{S} = 4\pi k\cdot\sigma\cdot\cancel{S}$ $\Rightarrow$ $E = 2\pi k\cdot\sigma$

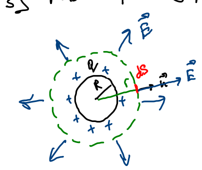
Си: $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ – эл. поле не зависит от расст.-я

2] Две параллельн. разноимённо заряжен. плоскости

$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \begin{cases} \text{м/у плоскостями} \\ E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \text{ и направлено от } +\sigma \text{ к } -\sigma \\ \text{Вне пластин} \\ E = 0 \end{cases}$



3] Равномерно заряженная сфера

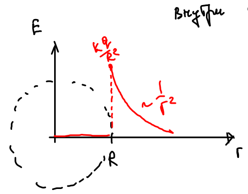


Поле $\vec{E}$ центрально-симметричное $\Rightarrow$ направления $\vec{E}$ в $\forall$ точке проходят ч/з центр сферы

$\oint\limits_{S_r} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint\limits_{S_r} E_r\cdot dS\cdot \cancel{\cos\alpha}^{1} = E_r\cdot\oint\limits_{S_r} dS = E_r\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k\cdot q$

$\Rightarrow E_r = \frac{k\cdot q}{r^2}$ Си: $E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$; $r \geq R$

Внутри сферы: $E_r\cdot 4\pi r^2 = 0$ <нет заряда> $\Rightarrow E_r = 0$, $r < R$



4] Объёмно заряженный шар:

$\rho = \frac{dq}{dV} = const$

$\vec{E}$ – центр.-симмет.

$\Rightarrow$ т. Гаусса: $\oint\limits_{S_r} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 4\pi k\cdot q_r$ q_r – заряд внутри сферы, радиуса r

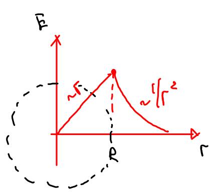
$\rho = const = \frac{q_r}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow q_r = q\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^3$

$\Rightarrow$ т. Гаусса:

$E_r\cdot 4\pi r^2 = 4\pi k\cdot q\cdot\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow \underline{E_r = k\frac{q}{R^3}\cdot r}$, $\underline{r \leq R}$

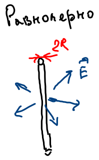
Для расст.-й $r \geq R$:

$\Rightarrow \underline{E_r = k\cdot\frac{q}{r^2}}$, $\underline{r > R}$



5] Равномерно заряженный ∞-длинный цилиндр (тонкая нить)

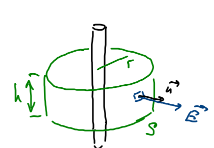
$\vec{E}$ имеет радиальный хар-р т.к. вектор $\vec{E}$ в $\forall$ точке $\perp$ оси цилиндра



$\tau = \frac{dq}{dl}$ – лин. плотность заряда; $\tau = const$

т. Гаусса: $E_r\cdot \cancel{2\pi}\, r\cdot\cancel{h} = \cancel{4\pi} k\cdot\tau\cdot\cancel{h}$

$\Rightarrow \underline{E_r = \frac{2k\cdot\tau}{r}}$, $\underline{r \geq R}$



Внутри цилиндра:

$\underline{E_r = 0}$, $\underline{r < R}$

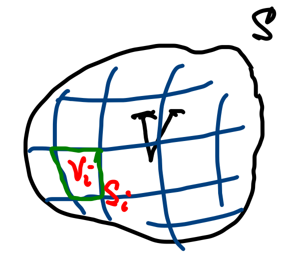
§ Теор. Гаусса в диф. форме. Дивергенция.

т. Г. диф. форма ⇒ связь м/у ρ и изменения $\vec{E}$ в окрестности точки

т. Гаусса (интегральная ф.)

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = 4\pi k \cdot \int_V \rho\, dV$$

где: V – объём, огранич-й пов-тью S



разобьём V на малые V_i, ограниченные пов-тями S_i

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \sum_i \oint_{S_i} \vec{E}\, d\vec{s} = \sum_i V_i \cdot \frac{\oint_{S_i} \vec{E}\, d\vec{s}}{V_i}$$

при условии $V_i \to 0$ (а значит $S_i \to 0$)

$$\boxed{\lim_{V_i \to 0} \frac{\oint_{S_i} \vec{E}\cdot d\vec{s}}{V_i} = \operatorname{div} \vec{E}}$$

⟺ «Дивергенция вектора $\vec{E}$» – есть поток, бескон. малого объёма V_i, исходящий из (входящий в) охватывающего некот. точку

лат – divergentia – расхожд-е

$$\sum_i V_i \cdot \frac{\oint_{S_i} \vec{E}\, d\vec{s}}{V_i} = \lim_{V_i \to 0} \sum_i V_i \cdot \operatorname{div} \vec{E} = \int_V \operatorname{div} \vec{E}\, dV$$

$$\Rightarrow \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{E}\cdot dV$$

– т. Острогр.-Гаусса (математика)

Интегр. форма т. Гаусса:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_V \operatorname{div} \vec{E}\cdot dV = 4\pi k \cdot \int_V \rho\, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi k \cdot \rho}$$

– т. Гаусса в диф. форме !

Си: $\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$