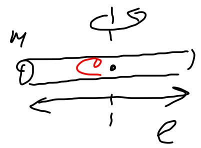
Момент. инерц. тв. тела

$$I = \sum I_i = \sum \Delta m_i \cdot r_i^2$$

$$I^{обруч} = m \cdot R^2$$

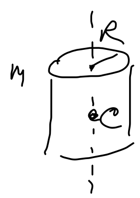
$$I = \int r^2 dm$$

Тонкий стержень



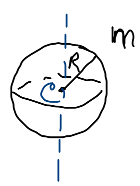
$$I_C = \frac{1}{12} m l^2$$

Сплошной цилиндр (тонкий диск)



$$I_C = \frac{mR^2}{2}$$

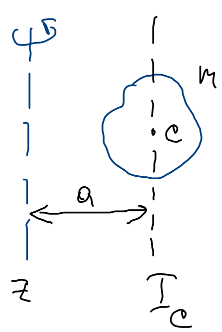
шар



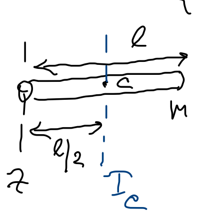
$$I_C = \frac{2}{5} m R^2$$

Теорема Гюйгенса Штейнера:

$$I_z = I_C + m \cdot a^2$$



момент. инерц. тонкого однор. стержня m и l относит. оси, проход. ч/з конец стержня



$$I_z = I_C + m \cdot a^2$$

$$a = l/2$$

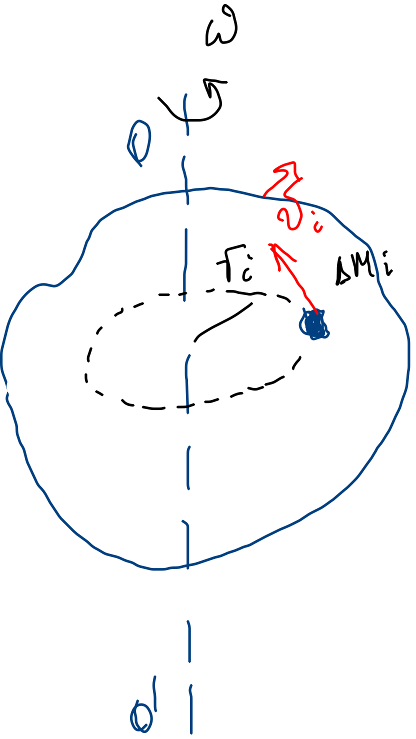
$$I_C = \frac{1}{12} m l^2$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{1}{12} m l^2 + m \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{12} m l^2 + m \frac{l^2}{4} = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\Rightarrow I_z = \frac{1}{3} m l^2$$

§ Кин. эн. вращат. движ. тв. тела



Кин. эн тв. тела = сумме кин. эн частей из кот. оно состоит

$$E_k = \sum_i E_{k_i} = \sum_i \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}$$

$$v_i = r_i \cdot \omega$$

$$\Rightarrow E_k = \sum_i \frac{\Delta m_i r_i^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \underbrace{\sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2}_{I} = \frac{\omega^2 \cdot I}{2}$$

$\Rightarrow$ кин. эн. вращат. движ. тв. тела:

$$\boxed{E_k = \frac{I \cdot \omega^2}{2}}$$!

где: I ~ момент. инерц. тв. тела, вычисл-й относит. оси вращ-я

Если тело участ-т в поступат-м и вращат. движ-и:

$$E_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I_c \cdot \omega^2}{2}$$

где: m ~ масса тела

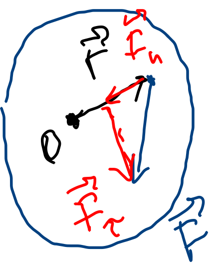
v_c — скорость центра масс

I_c — мом. инерц. относит. оси, прохор. ч/з центр масс

§ Момент силы

Тело вращ-ся вокруг неподв. оси

Пусть $\vec{F}$ дейст-т в плоск-ти $\perp$ оси вращ-я



$\vec{F} = \vec{F}_\tau + \vec{F}_n$

действие $\vec{F}_n$ - проходит ч/з ось вращ-я $\Rightarrow$ не влияет на вращ-е тела

$\Rightarrow$ к вращ-ю тв. тела д. $\vec{F}_\tau$

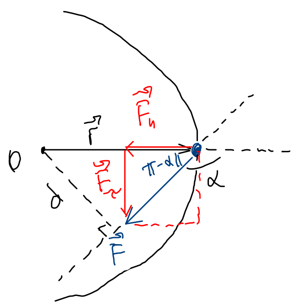
r – расст-е от оси вращ-я до точки прилож. силы

$\Rightarrow$ вводят: M - момент силы:

$M = F_\tau \cdot r = F \cdot \sin(\pi - \alpha) \cdot r = F \cdot \sin\alpha \cdot r$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\Rightarrow M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$



$d = r \sin(\pi - \alpha) = r \sin\alpha$ — плечо силы

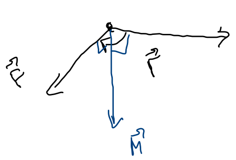
— расст-е от оси вращ-я до прямой вдоль кот-й дейст-т сила $\vec{F}$

$\Rightarrow M = F_\tau \cdot r = F \cdot r \cdot \sin\alpha = d \cdot F$

момент силы = сила $\times$ плечо

Вектор момента силы:

$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$



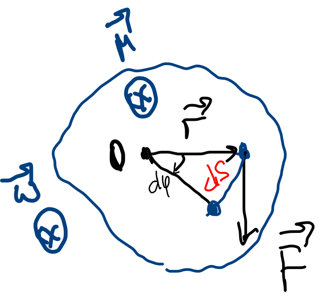
направл. $\Rightarrow$ правило правого винта

если $\alpha = 0$ (угол м/у $\vec{r}$ и $\vec{F}$) $\Rightarrow$ $M = 0$

§ Работа внешней силы при вращен. тв. тела

Пусть тело вращ. под $\vec{F}$ вокруг оси O. Найдём работу $\vec{F}$

Под действ-м $\vec{F}$ тело повернётся на $d\varphi$



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_\tau \cdot dS$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$dS = r\cdot d\varphi$$

$$\Rightarrow d\varphi = \omega\cdot dt$$

$$\Rightarrow dA = F_\tau \cdot r \cdot d\varphi = \underbrace{F_\tau \cdot r}_{M} \cdot \omega \cdot dt = M\,\omega\cdot dt$$

с учётом направл-й $\vec{M}$ и $\vec{\omega}$ $\Rightarrow dA = (\vec{M}, \vec{\omega})\cdot dt$

$\vec{\omega}\cdot dt = d\vec{\varphi}$ $\Rightarrow$ $dA = (\vec{M}, d\vec{\varphi})$

$$\Rightarrow dA = (\vec{M}, \vec{\omega})\,dt = (\vec{M}, d\vec{\varphi})$$

$$dA = M\cdot d\varphi$$

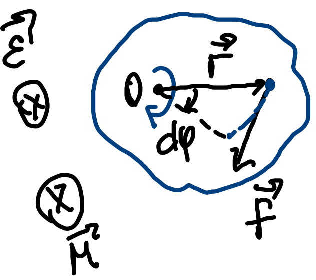
Полная работа!

$$A = \int dA = \int M\cdot d\varphi$$

Если $M = \text{const}$ $\Rightarrow$ $A = M\cdot\Delta\varphi$

работа силы = момент силы на измен. угла поворота !

§ Основн. ур-е динамики вращат. движ-я тв. тела



При повороте $\vec{F}$ совершит работу

$$dA = M\cdot d\varphi$$

кот. пойдет на измен. кин. эн. тв. тела

$$dA = dE_k$$

$$dE_k = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = \frac{I}{2}\, 2\cdot\omega\cdot d\omega = I\cdot\omega\cdot d\omega$$

$$\Rightarrow M\cdot d\varphi = I\cdot\omega\cdot d\omega \qquad d\varphi = \omega\cdot dt$$

$$\Rightarrow M\cdot\cancel{\omega}\cdot dt = I\cdot\cancel{\omega}\cdot d\omega$$

$$\Rightarrow M\cdot dt = I\cdot d\omega$$

$$\Rightarrow M = I\cdot\frac{d\omega}{dt} = I\cdot\varepsilon$$

где: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ – углов. ускор-е

$$M = I\cdot\varepsilon$$

Учтя направл. $\vec{M}$ и $\vec{\varepsilon}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{M} = I\cdot\vec{\varepsilon}}$ – основн. закон динам. вращат. движ. тв. тела вокруг неподвижн. оси.

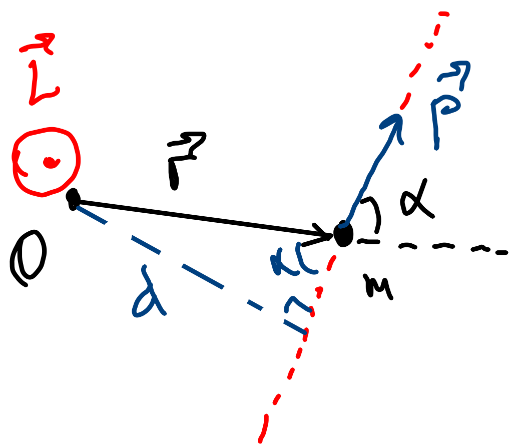
Если несколько сил:

$$I\cdot\vec{\varepsilon} = \sum_k \vec{M}_k$$

Сравнив с II з.Н: $m\cdot\vec{a} = \sum_k \vec{F}_k$ $\Rightarrow$ роль массы при вращ. движ. играет $I = \sum \Delta m_i r_i^2$

§ Момент импульса матер. точки. Момент имп. тв. тела (системы мат. точек)

Пусть m с $\vec{p}$ относительно т. O.



⇒ Моментом импульса мат. точки относит. т. O наз.:

$$\vec{L} \equiv [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\cdot\vec{v}]$$

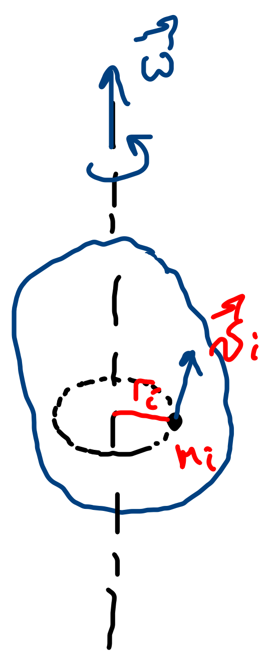
Модуль вектора L:

$$L = r\cdot p\cdot\sin\alpha = d\cdot p$$

d – длина перпенд. из т. O на прямую, вдоль кот. направлен $\vec{p}$

$d = r\cdot\sin\alpha$

– плечо импульса относит. т. O



Момент имп. i-ой точки тела:

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

$$L_i = r_i\cdot m_i\,\upsilon_i = \{\upsilon_i = \omega\cdot r_i\} = r_i^2\, m_i\cdot\omega = I_i\cdot\omega$$

⇒ При вращат. движ. мом. имп. мат. точки

$$L_i = I_i\cdot\omega$$