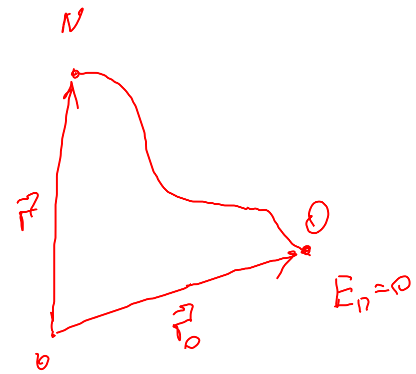
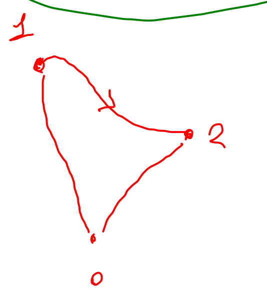
$$E_п = \int_N^0 \vec F \cdot d\vec r = \int_{\vec r}^{\vec r_0} \vec F \cdot d\vec r = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F \cdot d\vec r$$



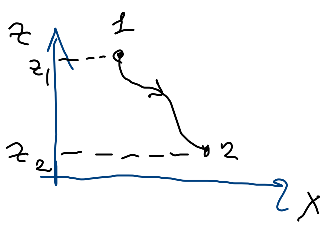

Теорем. об измен. потенц. эн.:

$$\boxed{A_{12} = -\Delta E_п = E_{п_1} - E_{п_2}}$$ ?




$$A_{12} = \int_1^2 \vec F \cdot d\vec r$$

# Потенц. эн. в однородн. поле сил тяжести

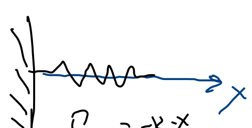



$A_{12} = m g (z_1 - z_2)$ <см. ранее>

$A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2}$

$\Rightarrow \boxed{E_п = m g z}$ – пот. эн. в однород. поле сил тяжести

# Потенц. эн. упруго деформ. пруж.:



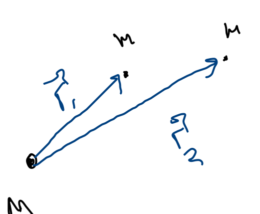

$F_{упр} = -kx$

x – удлинение пружины

$$A_{12} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = E_{п_1} - E_{п_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_п = \frac{kx^2}{2}}$$

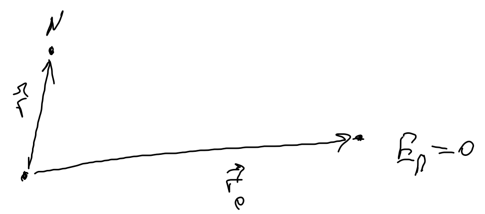
# Потенц. эн. в гравит. поле




$$A = \gamma \frac{Mm}{r_1} - \gamma \frac{Mm}{r_2} \Rightarrow \boxed{E_п = \gamma \frac{M \cdot m}{r}}$$

## § Связь м/у потенц. эн. и силой

$$E_п = \int_{\vec r}^{\vec r_0} \vec F\cdot d\vec r = -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F\cdot d\vec r$$




изменяя $\vec r$ ⇒ $E_п = E_п(\vec r) = E_п(x,y,z)$

⇒ $dE_п(x,y,z) = -dA = -\vec F\cdot d\vec r$

распишем в ДСК: $\left.\begin{array}{l} \vec F = F_x\cdot\hat i + F_y\cdot\hat j + F_z\cdot\hat k \\ d\vec r = dx\cdot\hat i + dy\cdot\hat j + dz\cdot\hat k \end{array}\right\}$ ⇒ $-\vec F\cdot d\vec r = -F_x\cdot dx - F_y\cdot dy - F_z\cdot dz = dE_п(x,y,z)$

Пусть, мат. точка движется под действ-м $\vec F$ вдоль оси $x$

⇒ $d\vec r \parallel$ оси $x$ ⇒ коорд. $y, z = const$ ⇒ $dy = dz = 0$

$$\Rightarrow -F_x\cdot dx = -dE_п(x,y,z)\Big|_{\substack{y=const\\ z=const}} \Rightarrow F_x = -\frac{dE_п(x,y,z)}{dx}\Big|_{\substack{y=const\\ z=const}} = -\frac{\partial E_п(x,y,z)}{\partial x}$$

где: $\frac{\partial E_п}{\partial x}$ – частн. произв. по $x$

Аналогично ⇒ $F_y = -\frac{\partial E_п}{\partial y}$ $\quad F_z = -\frac{\partial E_п}{\partial z}$

$$\Rightarrow \vec F = F_x\cdot\hat i + F_y\cdot\hat j + F_z\cdot\hat k = -\underbrace{\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\cdot\hat i + \frac{\partial E_п}{\partial y}\cdot\hat j + \frac{\partial E_п}{\partial z}\cdot\hat k\right)}_{\text{„вектор градиента" функции } E_п} \equiv -\overrightarrow{grad}\, E_п$$

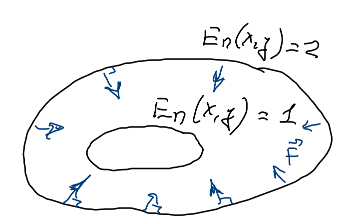
$\overrightarrow{grad}\, E_п$ – указ. напр-е в кот-м $E_п(x,y,z)$ возрастает наиб. быстро

Оператор - правило или закон. действ-е, которым н. подейств-ть ~~за~~ следующую ф-цию

$$\vec\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\cdot\hat i + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\hat j + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\hat k \quad \text{– „опер-р набла"}$$

$$\Rightarrow \vec F \equiv -\overrightarrow{grad}\, E_п \equiv -\vec\nabla E_п$$

„–" ⇒ $\vec F$ направлена в сторону наиск-го убыв-я $E_п$




$E_п(x,y,z) = const$ → эквипотенц. пов-ть

$\overrightarrow{grad}\, E_п$ всегда $\perp$ эквипотенц. пов-ти и направлен в сторону наиск-го убыв-я $E_п$

§ Влияние неконсерват-х сил. Закон сохр-я механ. эн-и.

$A_{12}^{\text{неконс}} = E_2 - E_1$ где: $A_{12}^{\text{неконс}}$ – работа неконсерват. сил

$E$ – механич. эн-я $E = E_k + E_п$

Д-во: Теор. об измен. $E_k$: $\underline{A_{12} = E_{k_2} - E_{k_1}}$ $E_{k_2}, E_{k_1}$ – кин. эн. в конечном и нач-м. сост-и

При этом $A_{12} = A_{12}^{\text{конс}} + A_{12}^{\text{неконс}}$

в свою очередь $A_{12}^{\text{конс}} = E_{п_1} - E_{п_2}$ где $E_{п_1}, E_{п_2}$ – пот. эн. в нач. и кон. сост-и

$\Rightarrow A_{12} = E_{п_1} - E_{п_2} + A_{12}^{\text{неконс}}$

$\Rightarrow E_{k_2} - E_{k_1} = E_{п_1} - E_{п_2} + A_{12}^{\text{неконс}}$

$\Rightarrow A_{12}^{\text{неконс}} = (E_{k_2} + E_{п_2}) - (E_{k_1} + E_{п_1}) = E_2 - E_1$

где: $E \equiv E_k + E_п$ – механическая эн-я

$A_{12}^{\text{неконс}} = E_2 - E_1$ – закон (теорема) измен-я полн. мех. эн-и

Если на систему действ-т только консерват. силы

$\Rightarrow \underline{E = \text{const}}$ Д

Д-во: $A_{12}^{\text{некон}} = 0 \Rightarrow \underline{E_2 = E_1 = \text{Const}}$ – Закон сохр-я полной механ. эн-и

Система $N$ – мат. точек, взаимод-е м/у собой консерв. силами

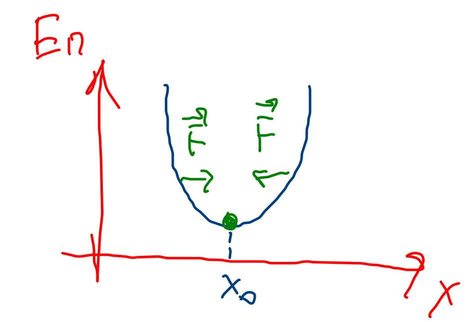
$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i} \sum_{\substack{k \\ k \neq i}} E_{п_{ik}} = \text{Const}$$

где: $E_{п_{ik}}$ – потенц. эн-я вз-я $i$-ой матер. точки в поле консерв. сил, создаваемых $k$-ой матер. точкой

## § Полож-я равновесия

$\vec{F} = -\vec{\text{grad}}\, E_п$

Рассм. однонапр. случай!



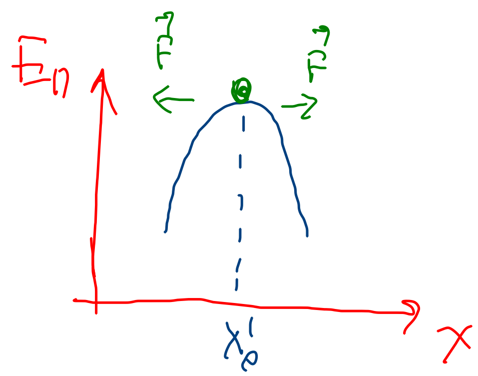


в т. $x_0$: $F_x = -\dfrac{dE_п}{dx} = 0$

— положение равновесия

Устойчивое!

$\Rightarrow E_п$ — минимум





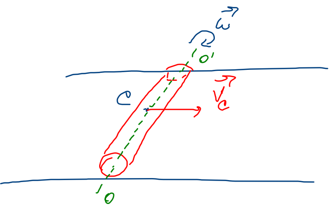
в т. $x_0'$: $F_x = -\dfrac{dE_п}{dx} = 0$

— полож. равновесия

Неустойчивое!

$\Rightarrow E_п$ — максимум

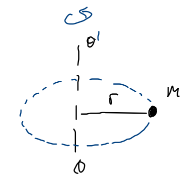
## гл. Механика тв. тела




Сложное движ. тв. тела = поступ. движ. + чисто вращат. движ.

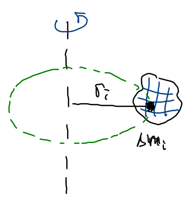
### § Момент инерции тв. тела

$I = m \cdot r^2$ - момент. инерц. мат. точки




момент инерц. тв. тела

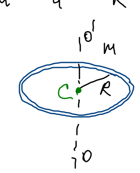
$$I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum I_i$$




Пусть тело – обруч массой m и R

$$\Rightarrow I = \sum_i \Delta m_i \cdot r_i^2 = \sum_i \Delta m_i \cdot R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i$$

$$\Rightarrow I = m \cdot R^2$$



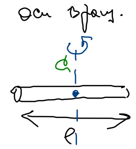
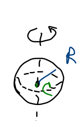

$$\Rightarrow \boxed{I_C = mR^2}$$

Если масса тела распределена непрерывно по объёму тела:

$$\sum \Delta m_i \cdot r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$$

$$\Rightarrow I = \int_V r^2 \, dm$$

Моменты инерции тел:

| тв. тело | полож. оси вращ. | момент инерц. |
|---|---|---|
| Тонкий стержень длины $l$ |  | $I_C = \frac{1}{12} m l^2$ |
| Сплошной цилиндр |  | $I_C = \frac{1}{2} m R^2$ |
| Шар, радиуса $R$ |  | $I_C = \frac{2}{5} m R^2$ |

Теор. Гюйгенса-Штейнера:

$$I = I_C + m \cdot a^2$$