

## Тема 3 ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

*Динамика* изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Как говорилось, *динамика* изучает причины, которые вызывают именно такой характер движения, а не иной.

Динамика опирается на три закона Ньютона.

### 3.1. Сила и масса

Тела, окружающие материальную точку (тело), способны оказать на неё определенное влияние, действие.

Влияние тел (или частиц) на движение друг друга называют *взаимодействием*.

Взаимодействие тел является причиной их ускорений, а ускорение – следствием их взаимодействия. Так, например, с ускорением движутся падающие на Землю тела. Действие тел друг на друга является причиной изменения формы и объёма тел (причиной деформации тел).

Взаимодействие тел характеризуется некоторой величиной, являющейся функцией положений ( $\vec{r}$ ) и скоростей ( $\vec{v}$ ) взаимодействующих тел. Мера механического воздействия на тело со стороны других тел, в результате которого данное тело получает ускорение или деформируется, называется *силой*  $\vec{F}$ .

Под действием силы тело:

- либо изменяет вектор скорости, т.е. приобретает ускорение (динамическое проявление  $\vec{F}$ );
- либо изменяет свою форму и размеры, т.е. деформируется (статическое проявление  $\vec{F}$ ).

*Сила* – это векторная величина, которая характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

### 3.2. Первый закон Ньютона

Если на тело не действуют силы, то механическое состояние тела не изменяется: тело не движется (не изменяются координаты тела, тело находится в состоянии покоя) или движется с постоянной скоростью (не изменяется скорость, тело движется без ускорения).

*Свободной материальной точкой* называют материальную точку, которая не взаимодействует с другими телами. Если действие сил скомпенсировано, то точка – *квазисвободная*.

Движение свободной или квазисвободной частицы называется движением по инерции.

*Закон инерции:* всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

Характер движения зависит от выбора системы отсчета. Одно и то же движение в разных системах отсчета выглядит по-разному.

*Существуют такие системы отсчета, в которых свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения в любом направлении.*

Такие системы отсчета называются *инерциальными системами отсчета* (ИСО). Системы отсчета, в которых нарушается закон инерции, называются неинерциальными.

Если частица свободная, то она движется с постоянной скоростью или покоится относительно инерциальной системы отсчета. Кинематическое уравнение движения для свободной материальной точки можно записать как  $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}t$ ;  $\vec{r}(t)$  – радиус-вектор материальной точки.

Способность тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*. Мерой инертности тела является физическая величина, называемая *массой тела*.

*Масса* (тела) – физическая величина, являющаяся одной из характеристик материи, определяющая её *инерциальные* (инертная масса) свойства:

1. Величина инертной массы не зависит от величины и направления действия сил.
2. Масса аддитивна – масса системы тел равна сумме масс тел, входящих в систему.

Первый закон Ньютона – это закон инерции. *Инерция* – стремление тела сохранить состояние покоя или равномерного (прямолинейного) движения.

*Первый закон Ньютона* формулируется следующим образом: *всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.*

Характер движения зависит от выбора системы отсчета. Одно и то же движение в разных системах отсчета выглядит по-разному.

Рассмотрим пример. Пусть системой отсчета является прямолинейно и равномерно движущийся вагон. Покоящееся относительно вагона тело – это квазисвободное тело, оно сохраняет это состояние до тех пор, пока скорость вагона постоянна. Относительно Земли это тело движется с постоянной скоростью. Можно сказать, что Земля и движущийся с постоянной скоростью относительно Земли вагон – это две инерциальные системы отсчета. Движение тела относительно этих систем отсчета подчиняется первому закону Ньютона. Но если вагон начнет заворачивать, тормозить или ускорять ход, то появятся явные нарушения закона Ньютона: покоящееся до того тело придет в движение без явного воздействия на него со стороны других тел. Система отсчета, в которой выполняется первый закон Ньютона, называется *инерциальной системой отсчета*. Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.

Инерциальных систем существует бесконечное множество. *Любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы прямолинейно и равномерно, будет также инерциальной.*

Опытным путем установлено, что за инерциальную систему отсчета с большой точностью можно принять систему отсчета, центр которой совмещён с Солнцем, а оси направлены на определённые звёзды. Эта система называется *гелиоцентрической системой отсчёта.*

Земля, строго говоря, не является инерциальной системой отсчёта (Земля вращается вокруг своей оси и вокруг Солнца). Однако в большинстве практических случаев заметить эту неинерциальность трудно. Поэтому систему отсчёта, связанную с Землёй, можно считать инерциальной.

Первый закон Ньютона отражает то, что в инерциальных системах отсчета:

- пространство однородно и изотропно;
- время однородно.

*Однородность пространства* означает, что все точки пространства эквивалентны.

*Изотропность пространства* означает, что все направления эквивалентны (равноправны).

*Однородность времени* означает, что все моменты времени эквивалентны.

### 3.3. Второй закон Ньютона

Под действием силы тело

- либо изменяет вектор скорости, т.е. приобретает ускорение (динамическое проявление  $\vec{F}$ );
- либо изменяет свою форму и размеры, т.е. деформируется (статическое проявление  $\vec{F}$ ).

Итак, причина ускорения тела – действие на него со стороны других тел. *Второй закон Ньютона* устанавливает количественную связь между силой, действующей на тело, и его ускорением: *ускорение, которое приобретает тело, прямо пропорционально действующей на него силе и обратно пропорционально массе этого тела*; по направлению ускорение совпадает с силой:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.1)$$

Второй закон Ньютона называют *основным законом динамики поступательного движения*, т.к. его использование совместно с уравнениями кинематики позволяет решить любую задачу о механическом движении тел.

Запишем выражение (3.1) иначе. Учтем, что в классической механике масса тела есть величина постоянная и ее можно внести под знак дифференциала:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (3.2)$$

Векторная величина, численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость, называется *импульсом* этой материальной точки:  $\vec{p} = m\vec{v}$ .

Тогда второй закон Ньютона можно записать в виде

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (3.3)$$

т.е. скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на нее силе. Выражение (3.3) – более общая формулировка второго закона Ньютона.

Единица силы в СИ – ньютон (Н): 1 Н – сила, которая массе 1 кг сообщает ускорение 1 м/с<sup>2</sup> в направлении действия силы:

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2.$$

Второй закон Ньютона выполняется только в инерциальных системах отсчета. Из него можно получить первый закон. Действительно, если на тело не действует сила  $\vec{F} = 0$ , то  $m\vec{a} = 0$ ; т.к.  $m \neq 0$ , то  $\vec{a} = 0$ , т.е. скорость тела остается постоянной. Однако первый закон Ньютона рассматривается не как следствие второго закона, а как самостоятельный закон, т.к. именно он утверждает существование инерциальных систем отсчета.

*Другая запись второго закона Ньютона:*  $\underbrace{\vec{F}dt}_{\substack{\text{импульс} \\ \text{силы}}} = d\vec{p}$ .

Здесь  $\vec{F}dt$  – произведение силы на время её действия, называется импульсом силы. Импульс силы – это временная характеристика действия силы;  $d\vec{p}$  – изменение импульса тела, изменение количества движения.

*Импульс силы* равен изменению количества движения тела под действием этой силы:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{p} = m\vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (3.4)$$

– уравнение движения материальной точки в общем виде относительно инерциальной системы отсчета.

<http://videofiles.tpu.ru/user/elenalis/01ВЫБИВАНИЕ ПЛАСТИНКИ, ВЫДЕРГИВАНИЕ СКАТЕРТИ.mp4>

### 3.4. Принцип независимого действия сил

Как применить второй закон Ньютона, если на тело действуют не одна, а несколько сил?

Опытным путем установлено: сила, действующая на тело, сообщает ему ускорение, которое определяется вторым законом Ньютона не зависимо от

того, действуют ли на это тело другие силы или нет. Пусть на тело массой  $m$  действуют силы

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n.$$

Они сообщают ускорения:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m}, \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_2}{m}, \dots, \vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Результирующее ускорение, полученное телом:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{F}_i}{m} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (3.5)$$

Сила  $\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  называется равнодействующей (результирующей) силой.

*Принцип независимого действия сил:* если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

Кроме того, действие одной силы согласно принципу независимого действия можно заменить действием нескольких сил (рис. 3.1). Силы и ускорения можно разлагать на составляющие.

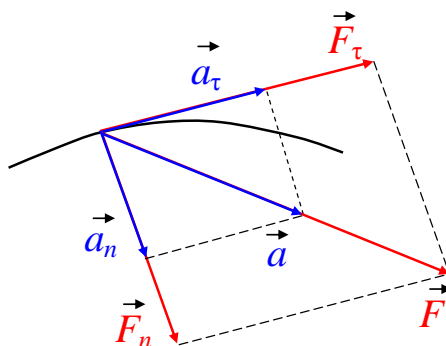


Рис. 3.1

### 3.5. Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер взаимодействия: если тело 1 действует на тело 2 с силой  $\vec{F}_{12}$ , то и тело 2 в свою очередь действует на тело 1 с силой  $\vec{F}_{21}$  (рис. 3.2).

*Две материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине, противоположно направленными вдоль одной прямой.*

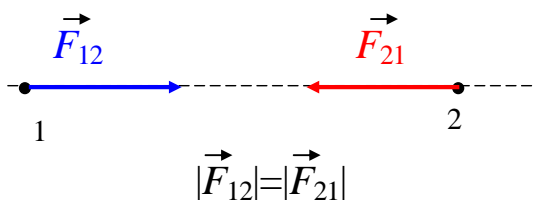


Рис. 3.2

*Третий закон Ньютона утверждает: силы, с которыми два тела действуют друг на друга, всегда равны по модулю и противоположны по направлению:*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (3.6)$$

Эти силы приложены к разным телам, всегда действуют парами и являются силами одной природы.

Из закона следует:

1. Силы имеют одну и ту же физическую природу (например, гравитационную, электрическую, контактную).
2. Эти силы не уравнивают друг друга, т.к. приложены к различным телам (поэтому их нельзя складывать).

Для системы тел (материальных точек) взаимодействие всех тел можно свести к силам парного взаимодействия между материальными точками.

Следовательно, третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики отдельной материальной точки к динамике системы материальных точек.

### 3.6. Силы в механике

Все силы, встречающиеся в природе и известные науке в настоящее время, в конечном счёте сводятся к четырем типам фундаментальных взаимодействий: гравитационным, электромагнитным, ядерным и слабым. Ядерные и слабые взаимодействия характерны для процессов с участием атомных ядер и элементарных частиц и проявляются на малых расстояниях ( $\sim 10^{-13}$  см). Электромагнитные и гравитационные силы убывают с увеличением расстояния между взаимодействующими телами медленно (например, сила гравитационного взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния между телами), поэтому электромагнитные и гравитационные силы называют дальнодействующими.

В механике рассматриваются различные силы: гравитационные силы, силы упругости, силы трения.

#### Гравитационные силы

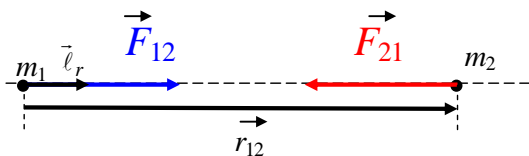
Гравитационное взаимодействие передается посредством гравитационного поля. Поэтому гравитационные силы – это силы дальнего действия. Гравитационные силы – это силы, обусловленные гравитационным взаимодействием всех без исключения тел (всемирным тяготением).

Согласно открытому Ньютоном закону всемирного тяготения два тела (материальные точки) притягиваются с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

$$F_{\text{гр}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}, \quad (3.7)$$

где  $\gamma$  – гравитационная постоянная,  $\gamma = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ .

Гравитационную силу  $\vec{F}_{21}$ , действующую на тело массой  $m_2$  со стороны тела массой  $m_1$ , можно записать в векторной форме:  $\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{\ell}_r$ , где  $\vec{\ell}_r$  – единичный вектор, направленный от тела 1 к телу 2 (рис. 3.3).



Две материальные точки взаимодействуют друг с другом силами, равными по величине, противоположно направленными вдоль одной прямой.

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}|$$

Рис. 3.3

### Силы упругости

Всякое реальное тело под действием приложенных к нему внешних сил деформируется, т.е. изменяет свои размеры и форму. Если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму, деформация называется упругой. Упругие силы возникают в теле в процессе его упругой деформации.

Силы упругости и силы трения определяются характером взаимодействия между молекулами вещества. Силы взаимодействия между молекулами имеют электромагнитное происхождение. Следовательно, упругие силы и силы трения являются по своей природе электромагнитными.

Примером *силы упругости* является сила, возникающая при растяжении пружины. Введём следующие обозначения (рис. 3.4):  $\ell_0$  – длина пружины в недеформированном состоянии;  $\Delta \ell$  – удлинение пружины (величина деформации);  $\vec{F}_{\text{внеш}}$  – внешняя сила, вызывающая деформацию;  $\vec{F}_{\text{упр}}$  – сила

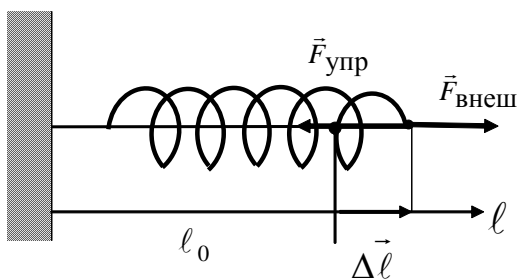


Рис. 3.4

упругости, возникающая в пружине. По закону Гука

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -k\Delta \vec{\ell}, \quad (3.8)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом жесткости пружины*. Знак минус указывает на то, что сила упругости направлена в сторону, противоположную деформации.

### Силы трения

Силы трения возникают при перемещении соприкасающихся тел друг относительно друга или при попытке вызвать такое перемещение. Трение между

поверхностями двух твердых тел называется сухим, а между твердым телом и жидкой или газообразной средой – вязким. Применительно к сухому трению различают *трение покоя, скольжения и качения*.

В случае сухого трения сила трения возникает не только при скольжении одной поверхности по другой, но также и при попытках вызвать такое скольжение. В этом случае она называется *силой трения покоя*.

Пусть тело в форме бруска прижимается к неподвижной гладкой плоской горизонтальной поверхности другого тела с силой  $\vec{F}_n$ , направленной по нормали к поверхности соприкосновения тел (рис. 3.5). Сила  $\vec{F}_n$  называется *силой нормального давления*. Она может быть обусловлена притяжением бруска к Земле  $\vec{F}_n = m\vec{g}$  или другими причинами. Так как брусок в вертикальном направлении не движется, то сила нормального давления уравнивается силой нормальной реакции опоры  $\vec{N}$  ( $N = F_n$ ).

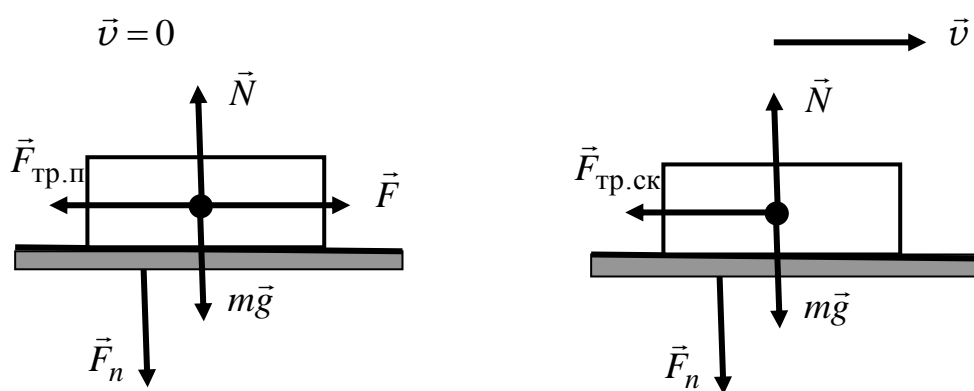


Рис. 3.5

Попытаемся переместить брусок внешней горизонтальной силой  $\vec{F}$ , направленной параллельно поверхности соприкосновения тел. Из опыта известно, что если модуль силы  $\vec{F}$  не превышает некоторого значения  $F_0$ , то внешняя сила уравнивается силой трения покоя  $\vec{F}_{\text{тр.п.}}$ , при этом  $\vec{F}_{\text{тр.п.}} = -\vec{F}$ . Поэтому брусок не движется. Если модуль силы  $\vec{F}$  превышает значение  $F_0$ , то брусок начнет скользить. Таким образом, при увеличении внешней силы  $F$  от нуля до  $F_0$  автоматически меняется в этих же пределах сила трения покоя  $F_{\text{тр.п.}}$ :  $0 \leq F_{\text{тр.п.}} \leq F_0$ .

Сила трения покоя препятствует попыткам переместить соприкасающиеся тела друг относительно друга.

*Сила трения скольжения*  $\vec{F}_{\text{тр.ск.}}$  возникает при перемещении (скольжении) соприкасающихся тел друг относительно друга. Приложенная к бруску сила трения скольжения направлена вдоль поверхности соприкосновения тел и противоположна скорости бруска. Явление сухого трения изучено Кулоном и Амонтоном. Из опыта известно, что модуль силы трения скольжения пропорционален силе нормального давления или, что то же самое, силе нормальной реакции опоры  $N$  ( $N = F_n$ ). Сила трения скольжения равна



$$F_{\text{тр.ск}} = \mu F_n = \mu \cdot N, \quad (3.9)$$

где  $\mu$  – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей.

Сила трения скольжения возникает при относительном скольжении тела по поверхности контакта, поэтому сила трения скольжения является функцией относительной скорости. В векторной форме закон Кулона – Амонтона для силы сухого трения имеет вид

$$\vec{F}_{\text{тр.ск}} = -\mu N \frac{\vec{v}}{v}, \quad (3.10)$$

где  $\frac{\vec{v}}{v} = \vec{l}_v$  – единичный вектор в направлении движения тела относительно поверхности, по которой движется тело. Скорость  $\vec{v}$  имеет смысл относительной скорости, т.е. скорости тела по отношению к поверхности, по которой движется тело. Коэффициент трения скольжения  $\mu$  является функцией относительной скорости движения тел  $\mu = \mu(v)$ , однако эта зависимость является слабой и в большинстве случаев ею можно пренебречь, считая коэффициент трения скольжения постоянной величиной.

Если тело движется по горизонтальной поверхности, то сила нормального давления численно равна силе тяжести ( $N = mg$ ), тогда  $F_{\text{тр.ск}} = \mu mg$ .

Если тело движется вдоль наклонной плоскости (рис. 3.6), то

$$F_{\text{тр.ск}} = \mu \cdot P \cdot \cos \alpha = \mu \cdot mg \cdot \cos \alpha. \quad (3.11)$$

Сила трения направлена в сторону, противоположную направлению движения данного тела относительно другого.

Вязкая среда (газ, жидкость) оказывает сопротивление движению тела. Из обобщения результатов эксперимента следует, что при малых скоростях тела  $\vec{v}_{\text{отн}}$  относительно вязкой среды сила сопротивления пропорциональна относительной скорости:  $F_c = \beta \cdot v_{\text{отн}}$ , где  $\beta$  – коэффициент

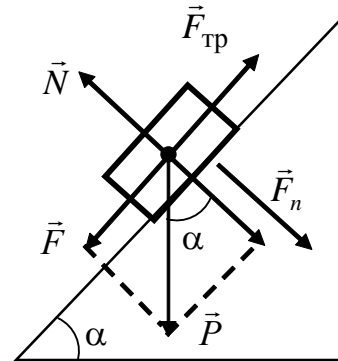


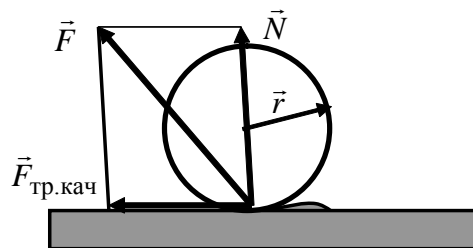
Рис. 3.6

сопротивления, зависящий от формы тела, вещества и температуры среды. Например, сила сопротивления, действующая на шарик радиуса  $R$  в жидкости, определяется законом  $F_c = 6\pi\eta R v_{\text{отн}}$ , где  $\beta = 6\pi\eta R$  и  $\eta$  – вязкость среды.

В векторной форме закон силы сопротивления имеет вид:  $\vec{F}_c = -\beta \cdot \vec{v}_{\text{отн}}$ .

При больших скоростях движения сила сопротивления начинает зависеть от скорости по закону  $F_c \sim v_{\text{отн}}^2$  или  $F_c \sim v_{\text{отн}}^3$ . Такое наблюдается, например, при полете самолетов.

Сила трения качения возникает при качении тел цилиндрической или шарообразной формы по гладкой поверхности вследствие деформации обоих соприкасающихся тел (рис. 3.7). На гладкой поверхности в месте ее соприкосновения с телом круглой формы появляется небольшое углубление и бугорок. Вследствие этого возникает сила сопротивления движению  $\vec{F}$  (сила реакции), горизонтальная составляющая которой называется силой трения качения  $\vec{F}_{\text{тр.кач}}$ , а вертикальная составляющая – силой нормальной реакции опоры  $\vec{N}$ . Сила трения качения определяется по закону Кулона



$$F_{\text{тр.кач}} = \mu_{\text{кач}} \frac{N}{r}, \quad (3.12)$$

где  $\mu_{\text{кач}}$  – коэффициент трения качения;  $r$  – радиус катящегося тела.

Обычно величина силы трения качения во много раз меньше силы трения скольжения. Этим обусловлено широкое использование в технике подшипников качения, позволяющих значительно уменьшить трение в деталях машин и механизмов.

### 3.7. Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета (рис. 3.8). Пусть система  $K'$  движется с постоянной скоростью  $\vec{v}$  относительно другой системы  $K$ . Выберем оси координат систем так, чтобы оси  $x$  и  $x'$  совпадали и были направлены вдоль вектора  $\vec{v}$ . За начало отсчета времени берем момент, когда начала координат  $O$  и  $O'$  совпадали. Пусть  $\vec{r}$  – радиус-вектор точки  $M$  в системе  $K$ , а  $\vec{r}'$  – радиус-вектор той же точки в системе  $K'$ . Соотношение между  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  имеет вид

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{v} t. \quad (3.13)$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от системы отсчета, т.е.

$$t = t'. \quad (3.14)$$

Соотношения (3.13) и (3.14) представляют собой так называемые преобразования Галилея. В проекции на оси координат эти преобразования имеют вид:

$$x = x' + vt', \quad y = y', \quad z = z'. \quad (3.15)$$

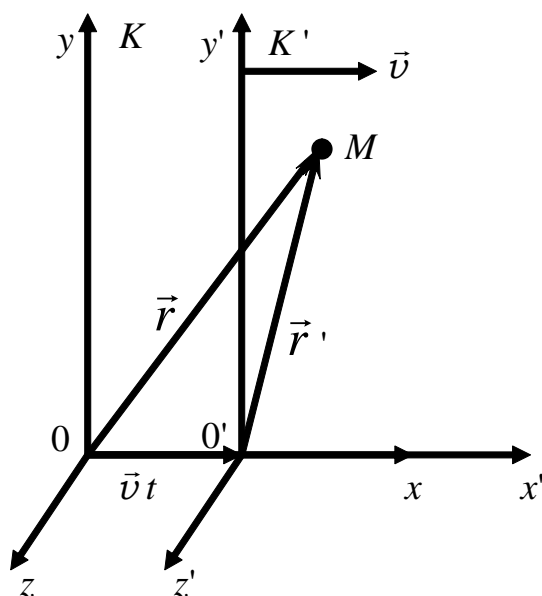


Рис. 3.8

Преобразования Галилея устанавливают связь между координатами при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они справедливы лишь в случае классической механики, при движении тел со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме  $c$ .

Если продифференцировать (3.13) по времени, то найдем правило сложения скоростей в классической механике:

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}, \quad (3.16)$$

где  $\vec{u}$  и  $\vec{u}'$  – скорости точки  $M$  в системах  $K$  и  $K'$ .

Ранее мы говорили, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы равномерно и прямолинейно, будет также инерциальной. Теперь мы имеем возможности доказать это утверждение. Если продифференцировать по времени выражение (3.16), то найдем, что  $\vec{a} = \vec{a}'$ .

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся друг относительно друга равномерно и прямолинейно, оказывается одним и тем же. Поэтому если одна из этих систем инерциальная (это значит при отсутствии сил  $\vec{a} = 0$ ), то и другие будут инерциальными ( $\vec{a}'$  также равно нулю).

В классической механике справедлив *механический принцип относительности (принцип относительности Галилея): уравнения динамики не изменяются при переходе от одной инерциальной системы к другой.* С механической точки зрения все инерциальные системы отсчета равноправны: ни одной из них нельзя отдать предпочтение перед другими. Практически это проявляется в том, что *никакими механическими опытами, проведенными в данной инерциальной системе отсчета, нельзя установить, покоится ли она или движется равномерно и прямолинейно.*

**Пример 1.** Находясь в вагоне поезда, который движется без толчков равномерно и прямолинейно, мы не сможем определить, движется вагон или покоится, если не посмотрим в окно.