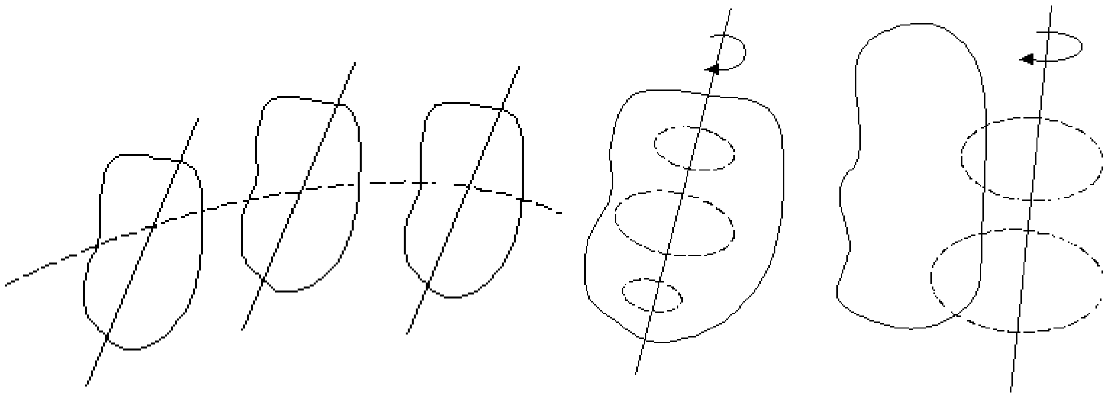
Тема 2
КИНЕМАТИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

2.1. Абсолютно твердое тело

Абсолютно твердое тело – вторая абстракция, с которой имеют дело в механике. В природе нет совершенно недеформируемых тел. Однако во многих случаях деформациями можно пренебречь.

Абсолютно твердым телом называется тело, деформациями которого можно пренебречь в условиях данной задачи.

Простейшими типами движения абсолютно твердого тела являются поступательное движение и вращательное движение вокруг неподвижной оси (рис. 2.1). Любое сложное движение твердого тела можно представить как совокупность поступательного и вращательного движений.



Поступательное движение Вращательное движение

Рис. 2.1

Поступательное движение – это такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается параллельной самой себе. При поступательном движении все точки тела движутся одинаково, имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому изучение движения твердого тела можно свести к изучению движения отдельных точек тела, т.е. к задаче кинематики точки.

Вращательным движением абсолютно твердого тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела описывают окружности, лежащие в параллельных плоскостях, причем центры окружностей лежат на оси вращения.

Будем рассматривать вращение тела вокруг неподвижной оси OO' (рис. 2.2). Проведем через ось OO' две плоскости: Q – неподвижная плоскость, она будет служить системой отсчета; P – подвижная плоскость, которая вращается вместе с телом.

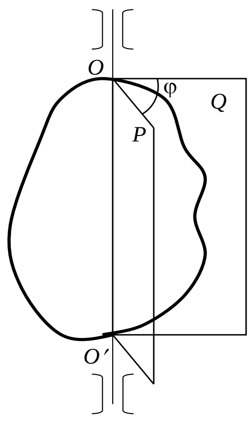


Рис. 2.2

Угол φ однозначно определяет мгновенное положение подвижной плоскости, а значит и тела. Итак, угол φ есть функция времени:

$$\varphi = \varphi(t). \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) называется *кинематическим уравнением вращательного движения*. Вид функции зависит от характера движения.

2.2. Кинематические характеристики вращательного движения

При рассмотрении вращательного движения вводятся следующие кинематические характеристики:

1. Вектор углового перемещения.

Вращательное движение абсолютно твердого тела относительно неподвижной оси – движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на прямой линии, называемой осью вращения.

При вращательном движении точки тела, находящиеся на разном расстоянии от оси вращения, за одинаковые промежутки времени имеют разные перемещения и разные скорости и ускорения.

В то же время радиус-вектор, соединяющий точки тела с осью вращения, за одинаковые промежутки времени поворачивается на один и тот же угол $\Delta\varphi$ (рис. 2.3).

Введем понятие вектора углового перемещения. *Вектор углового перемещения* $\Delta\vec{\varphi}$ – это вектор, определяющий, как вращается твердое тело. Направление вектора $\Delta\vec{\varphi}$ определяется *правилом правого винта:* если головку винта вращать в направлении вращении тела, то направление поступательного движения винта совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{\varphi}$.

Если время вращения бесконечно мало, угловое перемещение будет $d\vec{\varphi}$ (рис. 2.4). Угловое перемещение $d\vec{\varphi}$ – векторная величина (псевдовектор, аксиальный вектор), а модуль $|d\vec{\varphi}|$ равен углу поворота. Направление $d\vec{\varphi}$ определяется *правилом правого винта*.

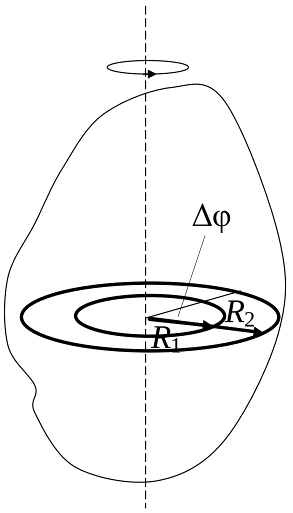


Рис. 2.3

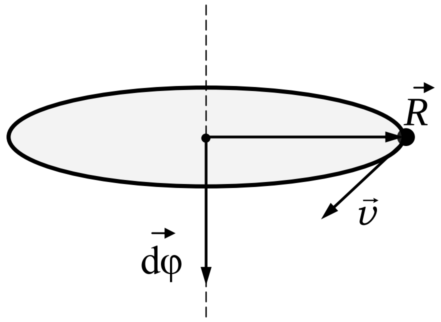


Рис. 2.4

2. Угловая скорость.

Пусть за время Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$.

Средняя угловая скорость – это физическая величина, равная отношению вектора углового перемещения к промежутку времени, за который это перемещение произошло:

$$\vec{\omega}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \tag{2.2}$$

Средняя угловая скорость – это вектор, направление которого совпадает с вектором $\Delta\vec{\varphi}$. Значит, вектор средней угловой скорости направлен по оси вращения и определяется правилом правого винта.

Мгновенная угловая скорость – это угловая скорость в данный момент времени. Мгновенная угловая скорость равна отношению элементарного углового перемещения (углового перемещения за бесконечно малое время) к промежутку времени, за который это перемещение произошло. Если время движения бесконечно мало $\Delta t \to 0$, то угловое перемещение $\Delta\vec{\varphi} \to d\vec{\varphi}$, значит, мгновенная угловая скорость – это предел, к которому стремится средняя угловая скорость при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \qquad \vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi}, \quad [\omega] = \frac{\text{рад}}{\text{с}}. \tag{2.3}$$

Векторная величина, равная первой производной от угла поворота тела по времени, называется *мгновенной угловой скоростью.*

Угловое перемещение $d\vec{\varphi}$ – векторная величина (псевдовектор, аксиальный вектор), а модуль $|d\vec{\varphi}|$ равен углу поворота за время dt.

Направление $d\vec{\varphi}$ определяется *правилом правого винта*:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}; \qquad \vec{\omega} \uparrow\uparrow d\vec{\varphi};$$

направление $\vec{\omega}$ также определяется правилом правого винта.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 2.6).

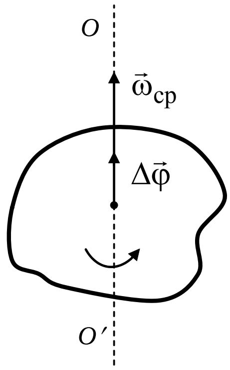


Рис. 2.5

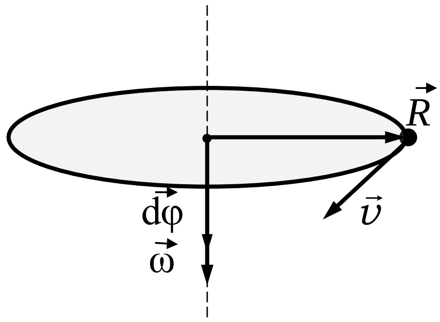


Рис. 2.6

3. Угловое ускорение.

Вращение с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega} = \text{const}$ называется *равномерным*. Если угловая скорость $\vec{\omega} \neq \text{const}$, то тело вращается с угловым ускорением.

Среднее угловое ускорение – это физическая величина, равная отношению вектора изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло:

$$\vec{\varepsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \tag{2.4}$$

Среднее угловое ускорение – это вектор, направление которого совпадает с направлением $\Delta\vec{\omega}$ (рис. 2.7).

Мгновенное угловое ускорение – это угловое ускорение вращающегося тела в данный момент времени. *Мгновенное угловое ускорение* – это физическая величина, равная отношению вектора элементарного изменения угловой скорости к промежутку времени, за который это изменение произошло**.** Если время движения бесконечно мало $\Delta t \to 0$, то вектор изменения угловой скорости $\Delta\vec{\omega} \to d\vec{\omega}$, значит, мгновенное угловое ускорение – это предел, к которому стремится среднее угловое ускорение при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}; \ \vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}. \tag{2.5}$$

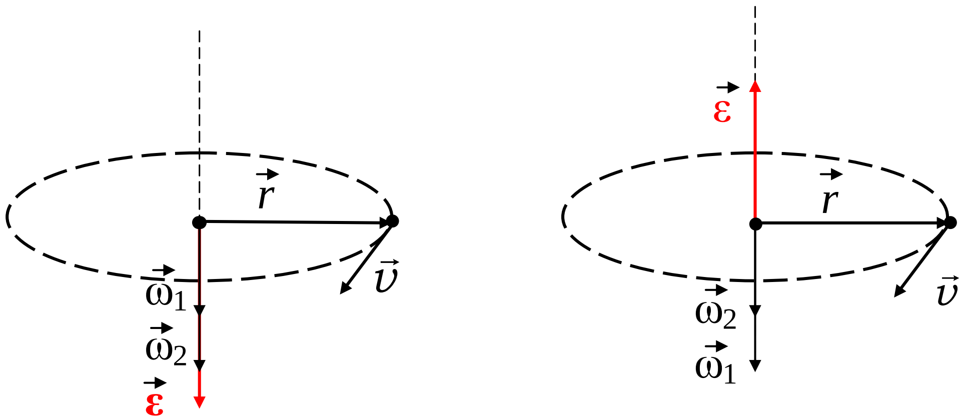


Рис. 2.7

Таким образом, *угловым ускорением* называется векторная величина, численно равная первой производной от угловой скорости по времени. Вектор углового ускорения $\vec\varepsilon$ направлен вдоль оси вращения в ту сторону, что и $\vec\omega$ при ускоренном вращении, и в противоположную сторону при замедленном вращении.

4. Период и частота вращения.

Вращение твердого тела с постоянной угловой скоростью $\vec\omega = \mathrm{const}$ называется *равномерным.* В этом случае средняя угловая скорость и мгновенная угловая скорость имеют равные значения:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \tag{2.6}$$

где φ – угол поворота за время t. Таким образом, при равномерном вращении ω показывает, на какой угол поворачивается тело в единицу времени.

Равномерное вращение можно характеризовать *периодом вращения T*. Под *периодом* понимают время, за которое тело делает один оборот, т.е. поворачивается на угол 2π. Поэтому

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.7}$$

Число оборотов в единицу времени (*частота вращения*)

$$v = \frac{1}{T}. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\omega = 2\pi v. \tag{2.9}$$

2.3. Связь между линейными и угловыми характеристиками движения

Рассмотрим произвольную точку тела *M*, которая находится на расстоянии *R* от оси вращения и вращается с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$ (рис. 2.8). Пусть за время Δt тело повернулось на угол $\Delta\varphi$, а точка прошла путь ΔS.

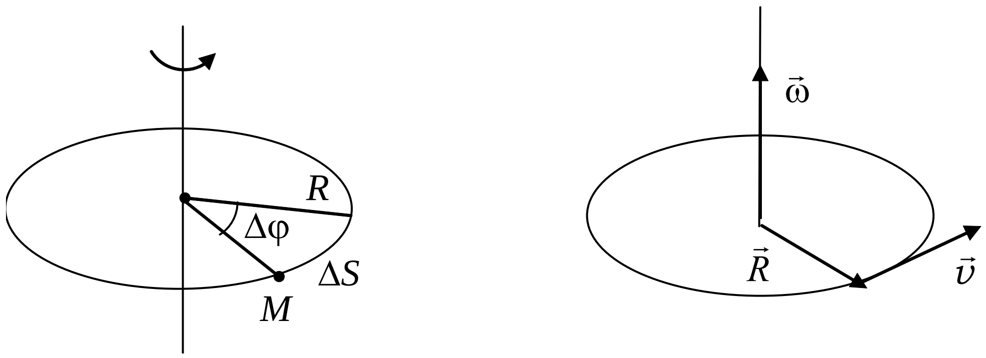


Рис. 2.8

Установим связь между линейными характеристиками точки ($\Delta S, \upsilon, a$) и угловыми характеристиками тела ($\Delta\varphi, \omega, \varepsilon$). Длина пути ΔS и угол поворота $\Delta\varphi$ связаны известным соотношением

$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi. \tag{2.10}$$

Делим обе части равенства на Δt и переходим к пределу

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{2.11}$$

Отсюда имеем

$$\upsilon = \omega R. \tag{2.12}$$

Формула (2.12) связывает модули линейной и угловой скоростей. Найдем выражение, связывающее векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$. Положение рассматриваемой точки тела будем определять с помощью вектора $\vec{R}$, который проведен в данную точку тела перпендикулярно к оси вращения.

Тогда можем записать формулу для линейной скорости как векторное произведение:

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}\vec{R}\right]. \tag{2.13}$$

При этом модуль векторного произведения, по определению, равен $\upsilon = \omega R \sin(\vec{\omega} \;\hat{}\; \vec{R})$, а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

Пусть тело вращается неравномерно (рис. 2.9). Тангенциальное ускорение точки

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\varepsilon. \tag{2.14}$$

Векторы $\vec{a}_\tau, \vec{R}, \vec{\varepsilon}$ взаимно перпендикулярны, поэтому можно записать, что

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon}\vec{R}]. \qquad (2.15)$$

Модуль тангенциального ускорения $a_\tau = \varepsilon R \sin(\vec{\varepsilon} \,\hat{}\, \vec{R})$.

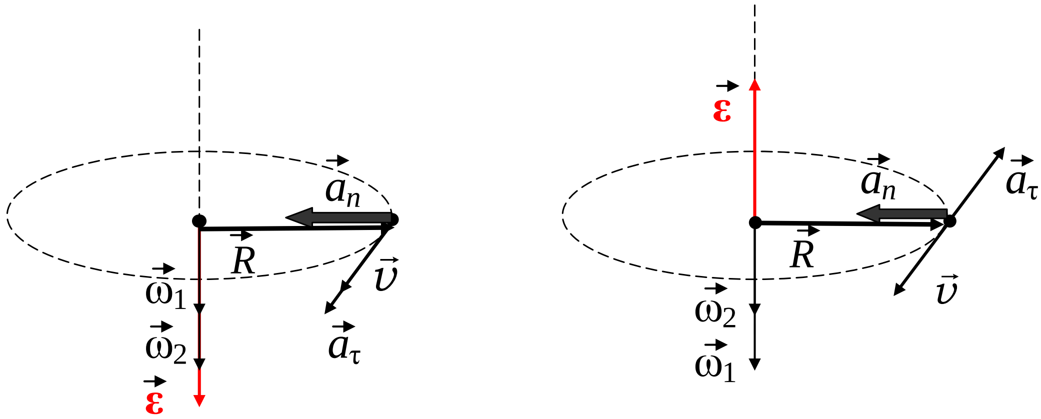


Рис. 2.9

Нормальное ускорение точки

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R. \qquad (2.16)$$

Вектор нормального ускорения направлен по радиусу к центру окружности – против вектора $\vec{R}$, тогда можно записать

$$\vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}. \qquad (2.17)$$

Формулы (2.14) и (2.16) связывают модули тангенциального и нормального ускорений точки с угловым ускорением ε и угловой скоростью ω тела.

В заключение сопоставим формулы, которые связывают кинематические характеристики твердого тела $(\varphi, \omega, \varepsilon)$ с соответствующими формулами поступательного движения точки.

Вид движения	Поступательное движение	Вращательное движение
Равномерное движение	$\upsilon = \text{const}$; $S = \upsilon t$	$\omega = \text{const}$; $\varphi = \omega t$
Равнопеременное движение	$a = \text{const}$; $\upsilon = \upsilon_0 \pm at$; $S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}$	$\varepsilon = \text{const}$; $\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t$; $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$