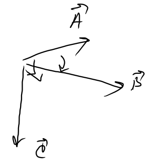
$\vec{C} = [\vec{A}, \vec{B}]$ – векторное произв.



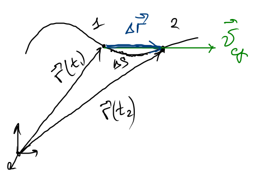
1° $[\vec{A}, \vec{B}] = -[\vec{B}, \vec{A}]$

2° $[\vec{A}, \vec{B}+\vec{C}] = [\vec{A}, \vec{B}] + [\vec{A}, \vec{C}]$

3° $g[\vec{A}, \vec{B}] = [g\vec{A}, \vec{B}] = [\vec{A}, g\vec{B}]$

где: g – алгебраическ. число

§ Скорость и ускор-е произв. движ. мат. точки



$t_1 \to \vec{r}(t_1) = \vec{r}_1$

$t_2 = t_1 + \Delta t \to \vec{r}(t_2) = \vec{r}_2$

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$ – вектор перемещения

ΔS – путь пройденный М.Т. м/у t_1 и t_2

Средняя скорость:

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \vec{v}_{ср} \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}$$

$\Delta t \to 0$

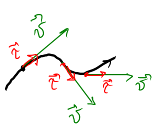
Мгновенная скорость частицы в момент t_1:

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

если $\Delta t \to 0$, т. 2 сдвинется к т. 1 и в пределе $\Delta\vec{r}$ становится касательным к т. 1.

$\Rightarrow$ $\vec{v}(t_1)$ направлен по касательной к траектории в т. 1

$\Rightarrow$ т.е. вектор мгновен. скор-ти направлен по касательной к точке траектории

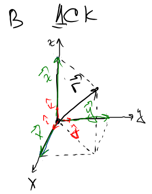


Введу ед. вектор $\vec{\tau}$ касательный в точке траектории

$|\vec{\tau}| = 1 \qquad \vec{\tau} \uparrow\uparrow \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}$$

В ДСК



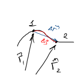
$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = x \cdot \hat{i} + y \cdot \hat{j} + z \cdot \hat{k}$

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt}$

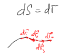
$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v_x} \cdot \hat{i} + \frac{dy}{dt} \cdot \hat{j} + \frac{dz}{dt} \cdot \hat{k} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \cdot \hat{k}$$

$$\Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

Заметим: чем меньше Δt, тем ближе $|\Delta\vec{r}|$ и ΔS и в пределе:



$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{|\Delta\vec{r}|} = 1 \Rightarrow dS = dr$$



$dr \equiv \lim_{\Delta r \to 0} \Delta r$ – обозначение бесконечно малой величины

Тогда:

$$|\vec{v}(t)| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}$$

т.е. $v = \frac{dS}{dt}$ или под скоростью понимают путь, проходимый частицей за единицу времени

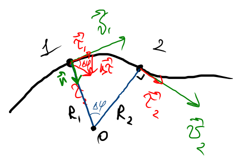
Ускорение

– Скорость измен-е скорости

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\tau}}{\Delta t} =$$

когда $\Delta t \to 0$ $\Rightarrow$ т. 2 $\to$ т. 1

$\Downarrow$

$\triangle ABC$ $\Rightarrow$ $\Delta\varphi \to 0$, $\angle\alpha \to 90°$, $\angle\beta \to 90°$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta\vec{\tau} \to |\Delta\tau| \cdot \vec{n}$

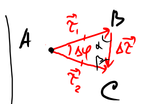
где: $\vec{n}$ - един. вектор, провед-й $\perp$ к вектору $\vec{\tau}_1$

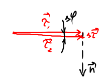
$|\Delta\tau|$ – м. оценить, как длину окруж-ти

$|\Delta\tau| \approx |\vec{\tau}_1| \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi$

1

$\Rightarrow \Delta\vec{\tau} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \Delta\varphi \cdot \vec{n}$ =





$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi \, \vec{n}}{\Delta t} =$$

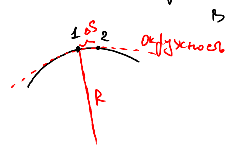
$\Delta\varphi$ в $\triangle ABC$ равен $\Delta\varphi$ в $\triangle O12$

если $\Delta t \to 0 \Rightarrow$ т. 2 $\to$ т. 1 $\Rightarrow R_1 \approx R_2 \approx R$

где R - радиусу некоторой окруж-ти, кот. сливается в окрестности точки т. 1 с траекторией на бесконечно малом ее участке

$\Rightarrow$ R – радиус кривизны траектории в т. 1 =

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{R} \cdot \frac{\vec{n}}{\Delta t} = \frac{\vec{n}}{R} \cdot \lim_{\Delta t} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\vec{n}}{R} \cdot v_1$$



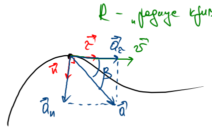
$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + v \frac{\vec{n}}{R} v = \underbrace{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}}_{\vec{a}_\tau} + \underbrace{\frac{v^2}{R} \vec{n}}_{\vec{a}_n}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{R} \vec{n}$$

$\vec{\tau}$ – ед. вектор, касат-й к траект.

$\vec{n}$ – ед. вект., нормальный к траект.

R – „радиус кривизны траектор" – т.е. радиус окр. ...



$\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$

$\Downarrow$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

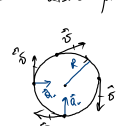
Направление вектора $\vec{a}$ полн. ускор-е, характер-ся β:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{a_n}{a_\tau}$$

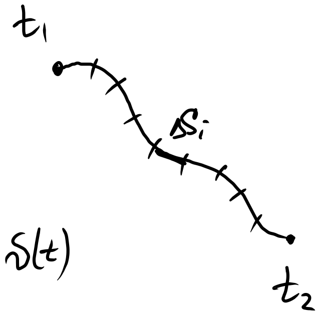
Равномерное движ-е по окр-ти:

$v = \text{const} \Rightarrow a_\tau = 0$

$\Rightarrow a = a_n = \frac{v^2}{R}$



§ Вычисление пройден. пути



S – ?

$$v = \frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

1. Разобьем $t_2 - t_1$ на N малых промежутков, настолько малых, что на каждом
$v_i = const$

2. Весь путь: $S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots \Delta S_N = \sum\limits_{i=1}^{N} \Delta S_i$

3. $\Delta S_i \approx v_i \cdot \Delta t_i$

$$\Rightarrow S \approx \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \Delta t_i$$

Точное выражение будет, когда

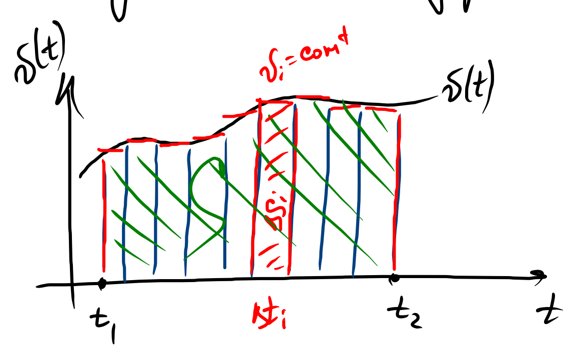
$$S = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (N \to \infty)}} \sum_{i=1}^{N} \Delta S_i = \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (N \to \infty)}} \sum_{i=1}^{N} v_i \cdot \Delta t_i = \left[\begin{array}{c} \text{если} \\ \text{такой} \\ \text{предел} \\ \text{существует} \end{array} \right] =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = \Phi(t) \Big|_{t_1}^{t_2} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1)$$

$\Phi(t)$ – первообразная

$v(t) = \dfrac{d\Phi}{dt}$

Геометрическая интерпретация:



$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$$

S – это площадь под кривой $v(t)$