§ Газ в поле сил тяжести. Барометрическ. формула.

\# Газ у пов-ти Земли:

действ-т: T и $F_{тяж}$ $\Rightarrow$ устан-ся зав-ть давл-я от высоты

$\Rightarrow$ барометр. формула

Упрощ-е (модель):

1. $g = const$

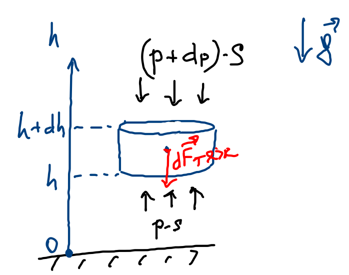
т.к. давление на 100 – 200 км $\to 0$; а $R_{Земли} = 6400$ км

$\Delta h \ll R_{Земли} \Rightarrow$ сила тяж. не меняется

2. концентр. молекул мала $\Rightarrow$ воздух – идеальный газ

$p = \frac{F}{S}$

3. $T = const$



Рассм. цилиндрич. воздушн. слой:

S – площадь основания

заключён-й м/у h и $h + dh$

Найдём баланс сил, действ-х на слой

на высоте $h \to p$

$h + dh \to p + dp$

$dF_{тяж}$ – сила тяжести воздушн. слоя

$$dF_{тяж} = dm \cdot g = m_0 \cdot dN \cdot g = $$
$$= m_0 \cdot n \cdot dV \cdot g = m_0 \cdot n \cdot S \cdot dh \cdot g$$

m_0 – масса 1-ой молек., n – концентр-я на высоте h

Усл. баланса сил на нижнем основ-и:

$$p \cdot S - (p + dp) \cdot S - dF_{тяж} = 0$$

или

$$(\cancel{p} + dp) \cdot \cancel{S} + m_0 \cdot n \cdot \cancel{S} \cdot dh \cdot g - \cancel{p \cdot S} = 0$$

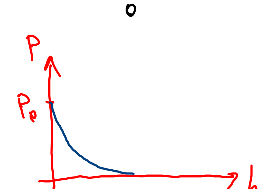
$$\Rightarrow \quad dp = -m_0 \cdot g \cdot n \cdot dh = \left[p = nkT \right] = -m_0 g \cdot \frac{p}{kT} \cdot dh$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} dh$$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{m_0 g}{kT} \int_0^h dh \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{m_0 g \cdot h}{kT} \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g \cdot h}{kT}}}$$

– барометрическ. ф-ла

где: p_0 – давление на высоте $h = 0$



§ Распределение Больцмана

– распред-е частиц (молекул) по потенц. эн.

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{m_0 g h}{kT}} \; ; \quad p = n \cdot k \cdot T \quad \Rightarrow \quad n \cancel{kT} = n_0 \cdot \cancel{kT} \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{kT}}$$

$$\Downarrow$$

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{kT}}$$

$m_0 g h \equiv E_p(h)$ – потенц. эн. 1-ой молекулы на высоте h

$$\Rightarrow \boxed{n = n_0 \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}}}$$ – распред-е Больцм. молекул в поле силы тяж-ти

Больцман: такое распр-е справедл. для $\forall$ поля с E_p

Введем понятие ф-и распр-я:

$$n = \frac{dN}{dV} \Rightarrow \frac{dN}{dV} = \frac{dN_0}{dV} \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}}$$

пусть: $dV = S \cdot dh = const$

$$\Rightarrow dN = dN_0 \cdot e^{-\frac{E_p}{kT}} \cdot dh$$ – кол-во молекул в слое dh

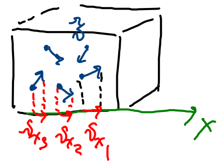
$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{dh} \cdot \frac{dN}{dN_0} \stackrel{\wedge}{=} f(h)}$$ – ф-я распред-я молек. по высоте h

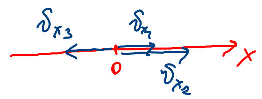
$$\Rightarrow f(h) = e^{-\frac{E_p(h)}{kT}}$$ – ф-я распределения Больцмана

§ Функция распред-я молекул

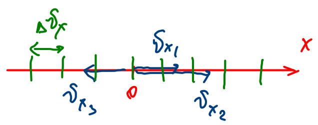
— для компоненты (проекции) скорости

Пусть газ в един. объёме, T, всего N





Разобью всю ось на ячейки длиной $\rightarrow \Delta v_x$

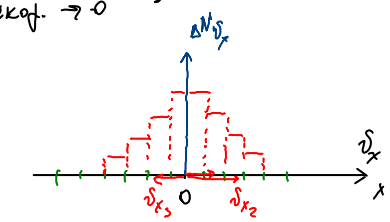


ΔN_{v_x} — число молекул, компон. кот. попали в интервал скоростей от v_x до $v_x + \Delta v_x$

— молек. движ. хаотич
⇒ направл. не предпочтит.
⇒ молек. б. группир-ся вблизи $v_x = 0$

— молекул с оч. больш. скор. $\to 0$

⇒ распред. д. иметь симметр. вид



Высота ΔN_{v_x} зависит от Δv_x и N

чем $\uparrow \Delta v_x \Rightarrow$ тем $\uparrow \Delta N_{v_x}$

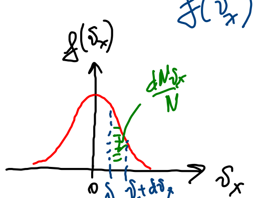
чем $\uparrow N \Rightarrow$ тем $\uparrow \Delta N_{v_x}$

$\frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N_{v_x}}{\Delta v_x}$ — не зависит от N и от Δv_x

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{\Delta v_x \to 0} \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N_{v_x}}{\Delta v_x} = \frac{1}{N} \cdot \lim_{\Delta v_x \to 0} \frac{\Delta N_{v_x}}{\Delta v_x} \equiv \frac{1}{N} \cdot \frac{dN_{v_x}}{dv_x} \equiv f(v_x)}$$

— ф-я распред-я по компоненте скор-ти (по v_x скор-ти) ?

$$f(v_x) = \frac{1}{N} \cdot \frac{dN_{v_x}}{dv_x} \quad ?$$



$$\Rightarrow \frac{dN_{v_x}}{N} = f(v_x) \cdot dv_x$$

— относит. доля молек., компон. скор-ти кот. лежит в $(v_x; v_x + dv_x)$

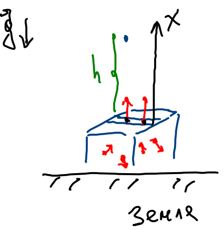
если $N \to \infty$

$\frac{dN_{v_x}}{N} \equiv dP_{v_x}$ — вер-ть того, молекула газа имеет компон-ту скор-ти $(v_x; v_x + dv_x)$

Число молек., комп. кот. лежат в v_{x_1} до v_{x_2}

$$\boxed{\Delta N = \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} dN_{v_x} = N \cdot \int_{v_{x_1}}^{v_{x_2}} f(v_x) \, dv_x}$$

§ Вид ф-и распред-я для v_x.



Сосуд с газом на земле, узкая щель, молек. летят вверх

Высота поднятия молекулы на h определ-ся из равенства кин. и потенц. эн.

$$m_0 g h = \frac{m_0 v_x^2}{2}$$

⇒ Число молекул в сосуде с проекц. ск-ти v_x б. пропорц-но числу молекул в поле силы тяжести с потенц. эн-ей $\frac{m_0 v_x^2}{2}$

$$\Rightarrow f(v_x) \sim e^{-\frac{m_0 g h(v_x)}{kT}} \sim e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}$$

$$f(v_x) = A_x \cdot e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}$$

найду A_x из усл-я нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(v_x)\,dv_x = \int \frac{dN_{v_x}}{N} = \frac{N}{N} = 1$!

$$\Rightarrow A_x = \frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}\,dx}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}\,dx = \left[\frac{m_0 v_x^2}{2kT} = y^2 \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi} \right] = \ldots = \left(\frac{2\pi k T}{m_0}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow A_x = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(v_x) = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}}$$

– ф-я распред-я для x-проекции скорости ид. газа (распред-е Максвелла для v_x) !

Аналогично для $f(v_y)$; $f(v_z)$

$$f(v_x) = \frac{dP_{v_x}}{dv_x} = \sqrt{\frac{m_0}{2\pi kT}} \cdot e^{-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}}$$

– ф-я распред. Максвелла, показ-я вер-ть того, что 1 молек. обладает проекц. скор-ти v_x в интервале $(v_x ; v_x + dv_x)$

Найдём долю молекул у кот-х вектор скорости $\vec v$ такой, что его проекции $(v_x ; v_x + dv_x)$, $(v_y ; v_y + dv_y)$, $(v_z ; v_z + dv_z)$

$$\frac{dN_{v_x, v_y, v_z}}{N} = \underbrace{dP_{v_x, v_y, v_z}}_{\text{это вер-ть сложного события}} = dP_{v_x} \cdot dP_{v_y} \cdot dP_{v_z} = f(v_x) \cdot dv_x \cdot f(v_y) \cdot dv_y \cdot f(v_z) \cdot dv_z =$$

$$= \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z = \underbrace{\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}}_{f(\vec v)} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z$$

$$\boxed{f(\vec v) = f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}}$$

– ф-я распред. Максвелла для вектора скорости $\vec v$!