КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Физика является одной из тех наук, знание которой необходимо для успешного изучения общенаучных и специальных дисциплин. При изучении курса физики студенты должны прочно усвоить основные законы и теории, овладеть необходимыми навыками решения задач по физике. **Единственный способ научиться решать задачи – это пытаться решать их самостоятельно. Знание теории закрепляется с использованием ее для решения задач. Уровень подготовки по физике определяется уровнем сложности задач, которые студент может решить.**

Формирование навыков грамотного решения типичных задач является основной целью методического введения (с примерами решения задач) к каждой теме сборника индивидуальных заданий.

В учебном пособии рассмотрены основные вопросы кинематики, приведены методические указания по решению типовых задач, а так же приведены задачи для самостоятельного решения и тесты.

Цель пособия – помочь студентам освоить материал программы, научить активно применять теоретические основы физики как рабочий аппарат, позволяющий решать конкретные задачи, приобрести уверенность в самостоятельной работе.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Внимательно прочитайте условия задачи. Сделайте сокращенную запись данных и искомых физических величин, предварительно представив их в системе СИ.

Система СИ состоит из основных, дополнительных и производных единиц. Основными единицами являются: единица длины – метр (м); массы – килограммы (кг); времени – секунда (с); силы электрического тока – ампер (А); термодинамической температуры – кельвин (К); количества вещества – моль (моль); силы света – кандела (кд).

Дополнительные единицы: единица плоского угла – радиан (рад); единица телесного угла – стерадиан (ср).

Производные единицы устанавливаются через другие единицы данной системы на основании физических законов, выражающих взаимосвязь между соответствующими величинами.

2. В условиях и при решении задач часто используются множители и приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц (см. Приложение).

3. Вникните в смысл задачи. Представьте физическое явление, о котором идет речь; введите упрощающие предположения, которые можно сделать при решении. Для этого необходимо использовать такие абстракции, как материальная точка, абсолютно твердое тело, луч света.

4. Если позволяет условие задачи, выполните схематический чертеж.
5. С помощью физических законов установите количественные связи между заданными и искомыми величинами, то есть составьте замкнутую систему уравнений, в которой число уравнений равнялось бы числу неизвестных.
6. Найдите решение полученной системы уравнений в виде алгоритма, отвечающего на вопрос задачи.
7. Проверьте правильность полученного решения, использую правило размерностей.
8. Подставьте в полученную формулу численные значения физических величин и проведете вычисления. Обратите внимание на точность численного ответа, которая не может быть больше точности исходных величин.

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

I. Основные формулы.

1. Материальная точка, это тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

2. Кинематическое уравнение движения.

Положение материальной точки M в декартовой системе координат определяется тремя координатами x, y, z или радиус–вектором $\vec{r}$, проведенным из начала отсчета к точке, тогда x, y, z – проекция радиус–вектора на соответствующие оси. При движении точки ее координаты, модуль и направление радиус–вектора изменяются, т.е. они являются функцией времени

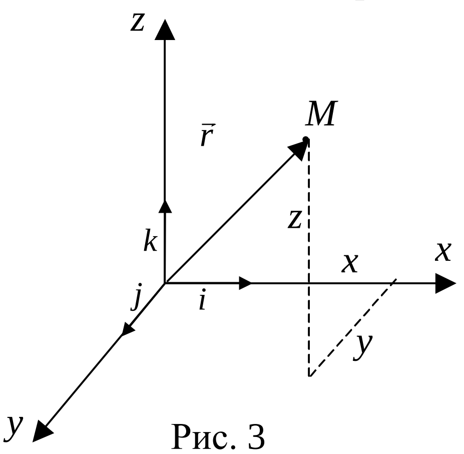


Рис. 3

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = f(t) \\ z = f(t) \end{cases} \text{ или } \vec{r} = \vec{r}(t).$$

Если вид функции $\vec{r}(t)$ известен, то уравнение движения задано в векторной форме $\vec{r} = ix + jy + kz$, где i, j, k – единичные вектора, а x, y, z – проекции вектора $\vec{r}$ на оси x, y, z.

Конец радиус–вектора $\vec{r}(t)$ описывает в пространстве кривую, которая называется траекторией движущейся точки.

3. Траектория – это линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчета. В зависимости от формы траектории различают прямолинейное и криволинейное движение. Вид траектории зависит от характера движения точки или системы отчет.

4. <u>Вектор перемещения.</u> Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиус–вектора за рассматриваемый промежуток времени). $\Delta\vec{r} = i\Delta x + j\Delta y + k\Delta z$, где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – проекции вектора $\Delta\vec{r}$ на оси x, y, z, а i, j, k – соответствующие орты.

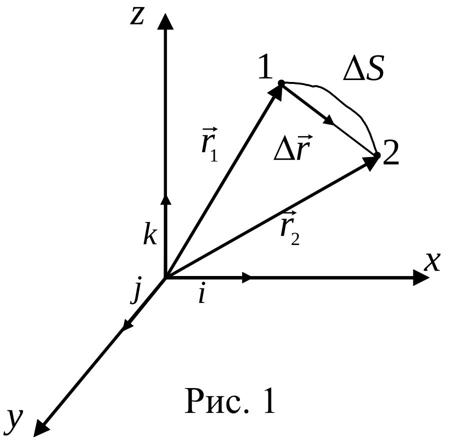


Рис. 1

5. <u>Длина пути</u>. Длина участка траектории 1–2, пройденного точкой за данный промежуток времени: $\Delta S = \Delta S(t)$ – скалярная функция времени.

При прямолинейном движении вектор перемещения совпадает с соответствующим участком траектории и модуль перемещения $|\Delta\vec{r}|$ равен пройденному пути ΔS: $|\Delta\vec{r}| = \Delta S$.

6. <u>Скорость.</u> Векторная величина, определяющая быстроту изменения положения точки в единицу времени.

<u>Средняя скорость</u> – векторная величина, определяемая отношением приращения радиус–вектора $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, в течении которого это приращение произошло $<\vec{\upsilon}> = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$.

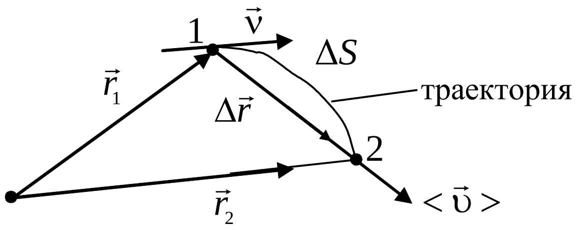


Рис. 2

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $|\Delta\vec{r}|$.

<u>Мгновенная скорость</u> – векторная величина, определяемая первой производной радиус–вектора движущейся точки по времени $\vec{\upsilon} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt}$.

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории в сторону движения (рис. 2). Так как $\vec{r} = ix + jy + kz$, то $\vec{\upsilon} = i\dfrac{dx}{dt} + j\dfrac{dy}{dt} + k\dfrac{dz}{dt} = i\upsilon_x + j\upsilon_y + k\upsilon_z$,

где $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt}, \upsilon_y = \dfrac{dy}{dt}, \upsilon_z = \dfrac{dz}{dt}$ – проекции вектора $\vec{\upsilon}$ на оси x, y, z. $\vec{\upsilon} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}$

. Модуль мгновенной скорости равен первой производной от пути по времени

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \left|\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.$$

<u>Средняя путевая скорость (средняя скорость на участке пути).</u> Средней путевой скоростью на некотором участке пути, называется величина, равная отношению пройденного пути ΔS к промежутку времени Δt, за который этот

путь пройден $\upsilon_{cp} = \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Эта скорость характеризует быстроту движения материальной точки в среднем за промежуток времени Δt. Средняя путевая скорость не содержит информации о направлении движения точки.

7. Ускорение. Ускорение – векторная величина, определяющая быстроту изменения скорости в единицу времени.

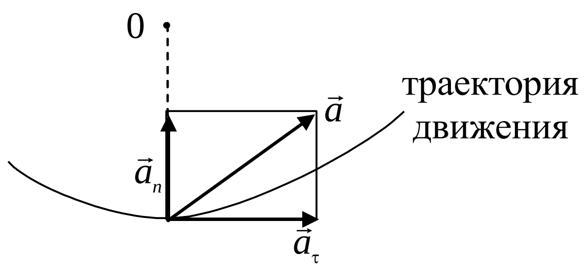
Среднее ускорение.

Векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к интервалу времени Δt, за которое это изменение произошло. $<\vec{a}> = \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$

Мгновенное ускорение. Векторная величина, равная производной от вектора скорости $\vec{\upsilon}$ по времени $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \dfrac{\overrightarrow{d\upsilon}}{dt}$; так как $\vec{\upsilon} = \dfrac{\overrightarrow{dr}}{dt}$, то $\vec{a} = \dfrac{\overrightarrow{d^2 r}}{dt^2}$. Если уравнение движения заданы в координатной форме, то ускорение $\vec{a}$ определяют по его проекциям на оси координат: если $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то $a_x = \dfrac{d\upsilon_x}{dt} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$, $a_y = \dfrac{d\upsilon_y}{dt} = \dfrac{d^2 y}{dt^2}$, $a_z = \dfrac{d\upsilon_z}{dt} = \dfrac{d^2 z}{dt^2}$.

Модуль ускорения $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\left(\dfrac{d^2 x}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2 y}{dt^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2 z}{dt^2}\right)^2}$.

Нормальное и тангенциальное ускорение. При естественном способе описания движения точки (в случае криволинейного движения) ускорение a разлагается на две составляющие: касательное (тангенциальное) a_τ и нормальное (центростремительное) a_n.



Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по модулю. Тангенциальное ускорение направленно по касательной к траектории.

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Нормальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения скорости по направлению. Нормальное ускорение направлено к центру кривизны траектории.

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$$

Таким образом, полное ускорение при криволинейном движении $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Модуль полного ускорения $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Классификация движения в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.

a_τ	a_n	Движение

0	0	прямолинейное равномерное
$a_\tau = a = const$	0	прямолинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	0	прямолинейное с переменным ускорением
0	$const$	равномерное по окружности
0	$\neq 0$	равномерное криволинейное
$const$	$\neq 0$	криволинейное равнопеременные
$a_\tau = f(t)$	$\neq 0$	криволинейное с переменным ускорением

Примеры решения задач

Пример 1.

Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где A=2 м, B=1 м/с, C=–0,5 м/с^3. Найти координату x, скорость υ и ускорение a точки в момент времени $t=2$ с.

Дано:
$x = 2 + t - 0{,}5t^3$;
$t = 2c$

Найти:
υ, a–?

Решение.
Координату x найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A, B и C и времени

$$x = \left(2 + 1\cdot 2 - 0{,}5\cdot 2^3\right) = 0 \text{ (м)},$$

Мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

В момент времени t=2 с $\upsilon = \left(1 - 3\cdot 0{,}5\cdot 2^2\right)$=–5 (м/с).

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени: $a = \frac{d\upsilon}{dt} = 6Ct$

В момент времени t=2 с $a = 6(-0{,}5)\cdot 2$ =–6 (м/с^2).

Пример 2.

Материальная точка движется по прямой. Уравнение ее движения $s=t^4+2t^2+5$. Определить мгновенную скорость и ускорение точки в конце второй секунды от начала движения, среднюю скорость и путь, пройденный за это время.

Дано:
$s=t^4+2t^2+5$, t=2 с.

Найти:
υ, a, $<\upsilon>$, s–?

Решение.
Мгновенная скорость – это первая производная от пути по времени: $\upsilon = \frac{ds}{dt} = 4t^3 + 4t = 4\left(2^3 + 2\right) = 40$ (м/с).

Мгновенное ускорение – это первая производная от скорости по времени:

$$a=\frac{d\upsilon}{dt}=12t^2+4=12\cdot 2^2+4=52\,(\text{м/с}^2).$$

Средняя скорость точки $<\upsilon>$ за время $\Delta t=t-t_0$ определяется по формуле $<\upsilon>=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t)-s(0)}{t-t_0}$.

Так как $t_0=0$, то $<\upsilon>=\frac{t^4+2t^2+5-5}{t}=t^3+2t=12$ (м/с).

Путь, пройденный точкой за время t=2 с, будет равен

$$s=s(t)-s(0)=t^4+2t^2+5-5=2^4+2\cdot 2^2=24\,(\text{м}).$$

Пример 3.

Движение двух тел описывается уравнениями. Определить величину скоростей этих тел и момент времени, когда ускорения их будут одинаковы, а также значение ускорения в этот момент времени.

Дано:

$x_1=0{,}75t^3+2{,}25t^2+t;$

$x_2=0{,}25t^3+3t^2+1{,}5t$

$a_1=a_2=a$

Найти:

$\upsilon_1,\upsilon_2,t,a$

Решение.

Определим момент времени, когда ускорения обоих тел одинаковы. Для этого найдем выражение для ускорения первого и второго тела, продифференцировав по времени уравнения движения этих тел: $a_1=\frac{d\upsilon_1}{dt}=\frac{d^2x_1}{dt^2}=4{,}5+4{,}5t$

$$a_2=\frac{d\upsilon_2}{dt}=\frac{d^2x_2}{dt^2}=6+1{,}5t$$

Согласно условию $a_1=a_2$ в какой–то момент времени t. Приравниваем полученные выражения для a друг к другу и решаем уравнение относительно t:

$$4{,}5+4{,}5t=6+1{,}5t;\quad 3t=1{,}5;\quad t=0{,}5\,c$$

Зная t, найдем значение скоростей тел в этот момент времени:

$$\upsilon_1=\frac{dx_1}{dt}=2{,}25t^2+4{,}5t+1=2{,}25\cdot 0{,}5^2+4{,}5\cdot 0{,}5\cdot 0{,}1+1\cong 3{,}81(м/с).$$

$$\upsilon_2=\frac{dx_2}{dt}=0{,}75t^2+6t+1{,}5=0{,}75\cdot 0{,}5^2+6\cdot 0{,}5+1{,}5\cong 4{,}69(м/с)$$

Ускорение тел в этот момент времени будет

$$a_1=a_2=6+1{,}5t=6{,}75\,(\text{м/с}^2).$$

Пример 4.

Тяжелое тело брошено вверх с высоты 12 м под углом 30° к горизонту с начальной скоростью 12 м/с. Определить продолжительность полета тела до точки А и до точки В (рис. 1); максимальную высоту, которой достигнет тело, дальность полета тела. Сопротивление воздуха не учитывать.

Дано:
H=12 м,
$\varphi = 30^\circ$,
$\upsilon_0 = 12$ м/с

Найти:
$t_A, t_B, H_{\max}, x_{\max}$ –?

Решение.

В обозначенной на рис. 3 системе координат составляющие скорости будут:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\varphi; \tag{1}$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\varphi - gt \tag{2}$$

Координаты тела с течением времени меняются в соответствии с уравнением равнопеременного движения:

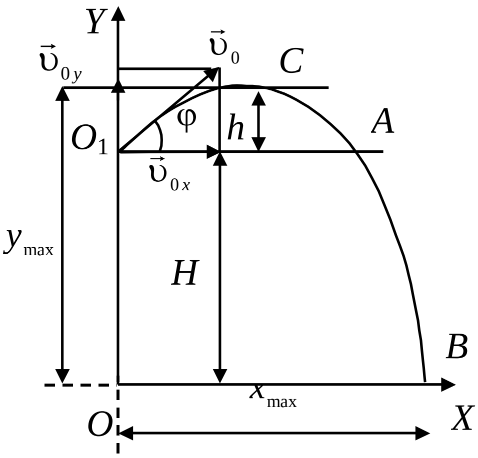


Рис. 1

$$y = H + \upsilon_0 t \sin\varphi - \frac{gt^2}{2} \tag{3}$$

$$x = \upsilon_0 t \cos\varphi \tag{4}$$

Время подъема тела найдем из условия, что в наивысшей точке подъема тела скорость $\upsilon_y = 0$. Тогда из уравнения (2)

$$t_{подъема} = \frac{\upsilon_0 \sin\varphi}{g} \tag{5}$$

Время спуска тела от точки C до точки A равно времени подъема, поэтому продолжительность полета от точки O до точки A равна:

$$t_A = 2t_{подъема} = \frac{2\upsilon_0 \sin\varphi}{g} \tag{6}$$

Максимальную высоту подъема найдем из уравнения (3), подставив в него время подъема из уравнения (5):

$$y_{\max} = H_{\max} = H + \frac{\upsilon_0^2 \sin^2\varphi}{2g} \tag{7}$$

Время полета тела до точки B найдем из уравнения (3), приравняв координату y к нулю (y=0):

$$t_B = \frac{\upsilon_0 \sin\varphi}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon_0 \sin\varphi}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}} \tag{8}$$

Дальность полета найдем из уравнения (4), подставив в него время движения из уравнения (8) $x_{\max} = \upsilon_0 t_B \cos\varphi$ (9). Проведем вычисления по формуле (6):

$$t_A = \frac{2\upsilon_0 \sin\varphi}{g} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0,5}{9,81} \cong 1,22\,(\text{с});$$

по формуле (8):

$$t_B = \frac{12 \cdot 0,5}{9,81} + \sqrt{\left(\frac{12 \cdot 0,5}{9,81}\right)^2 + \frac{2 \cdot 12}{9,81}} \cong 2,29\,(\text{с});$$

по формуле (7):

$$H_{\max} = 12 + \frac{12^{12} \cdot 0{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} \cong 12 + 1{,}83 = 13{,}83\,(\text{м});$$

по формуле (9):

$$x_{\max} = 12 \cdot 0{,}866 \cdot 2{,}29 \cong 23{,}8\,(\text{м})$$

Пример 5.

По условию задачи 4 найти в момент приземления тела следующие величины: скорость и угол падения тела, тангенциальное и нормальное ускорения тела и радиус кривизны траектории.

Дано:	Решение.
H=12 м, $\varphi = 30^\circ$, $\upsilon_0 = 12$ м/с	Результирующая или мгновенная скорость в точке B (рис. 4) находится как векторная сумма составляющих $\vec{\upsilon}_X$ и $\vec{\upsilon}_y$: $\vec{\upsilon}_B = \vec{\upsilon}_x + \vec{\upsilon}_y$ или $\upsilon_{\text{В}} = \sqrt{\upsilon_0^2 \cos^2 \varphi + \upsilon_y^2}$.
Найти: $\upsilon_B, \beta, a_\tau, a_n, R$–?	Составляющую υ_y в точке B найдем из уравнения (2)

предыдущей задачи, подставив в него время движения t_B из уравнения (8):

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\varphi - g t_B = \sqrt{(\upsilon_0 \sin\varphi)^2 + 2gH} .$$

Тогда скорость в точке B:

$$\upsilon_B = \sqrt{(\upsilon_0 \cos\varphi)^2 + (\upsilon_0 \sin\varphi)^2 + 2gH} = \sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH} .$$

Вычисляем

$$\upsilon_B = \sqrt{12^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 12} \cong 19{,}48 \text{ (м/с).}$$

Для определения угла β, который составляет вектор скорости $\vec{\upsilon}_B$ с горизонтальной осью x, воспользуемся треугольником скоростей (рис. 4):

$$\sin\beta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_B} = \frac{\sqrt{(\upsilon_0 \sin\varphi)^2 + 2gH}}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gH}} \cong \frac{16{,}48}{19{,}48} = 0{,}846;$$

$$\beta = \arcsin 0{,}846 = 57^\circ 46'$$

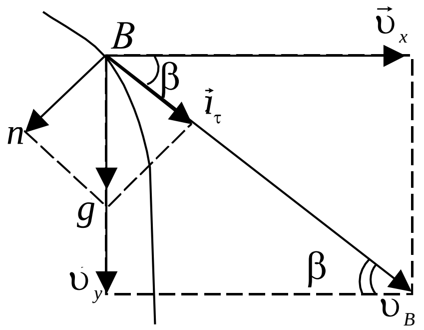


Рис. 2

Построим в точке B треугольник ускорений. Тангенциальная составляющая ускорения $\vec{a}_\tau$ направлена вдоль вектора мгновенной скорости в данной точке, т.е. по касательной к траектории. Нормальная составляющая ускорения $\vec{a}_n$ направлена перпендикулярно вектору мгновенной скорости $\vec{\upsilon}_B$. Их векторная сумма $\vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{g}$.

Тогда из рис. 2 находим:

$$a_\tau = g \sin\beta = g \frac{\upsilon_y}{\upsilon_B}; \; a_n = g \cos\beta = g \frac{\upsilon_x}{\upsilon_B} .$$

Вычисляем

$$a_\tau = g \sin\beta = 9{,}81 \cdot 0{,}846 \cong 8{,}3 \text{ (м/с}^2\text{);}$$

$$a_n = g\cos\beta = 9{,}81\cdot 01{,}533 \cong 5{,}23 \text{ (м/с}^2\text{)}.$$

Радиус кривизны траектории в точке приземления определяем из уравнения $a_n = \dfrac{\upsilon_B^2}{R}$.

Отсюда $R = \dfrac{\upsilon_B^2}{a_n} = \dfrac{19{,}48^2}{5{,}23} \cong 72{,}56$ (м).

<u>Пример 6.</u> Прямолинейное движение. Частица движется по прямой с ускорением, модуль которого зависит от ее скорости υ по закону $a = \alpha\sqrt{\upsilon},$ где α – положительная постоянная. В начальный момент скорость точки равна υ_0. Какой путь она пройдет до остановки? За какое время этот путь будет пройден?

Решение. Поскольку $a = \dfrac{d\upsilon}{dt}$, то $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \alpha\sqrt{\upsilon}.$ Разделив переменные, имеем

$$\frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = -\alpha dt. \tag{1}$$

Проинтегрировав (1), получим после несложных преобразований

$$\sqrt{\upsilon} - \sqrt{\upsilon_0} = -\frac{\alpha t}{2}. \tag{2}$$

Решая уравнение (2) , найдем время τ до остановки

$$\tau = \frac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\alpha}. \tag{3}$$

Поскольку $\upsilon = \dfrac{ds}{dt}$, то с учетом (2)

$$ds = (\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha t}{2})^2 dt. \tag{4}$$

Проинтегрировав (4) в пределах от 0 до $\tau,$ найдем искомую величину

$$s = \int_0^{\tau} (\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha t}{2})^2 dt = \frac{2}{\alpha}\left[\frac{(\sqrt{\upsilon_0} - \frac{\alpha\tau}{2})^3}{3} - \frac{(\upsilon_0)^{3/2}}{3}\right] \tag{5}$$

После подстановки (3) в (5), получим $s = \dfrac{2}{3\alpha}\cdot(\upsilon_0)^{3/2}.$

Ответы: $\tau = \dfrac{2\sqrt{\upsilon_0}}{\alpha}$; $s = \dfrac{2}{3\alpha}\cdot(\upsilon_0)^{3/2}.$

<u>Пример 7</u>. Уравнение траектории. Частица движется в плоскости XOY из точки с координатами x = y = 0 со скоростью $\vec{\upsilon} = a\vec{i} + bx^2\vec{j},$ где a и b –постоянные, $\vec{i}, \vec{j}$ - орты осей. Найдите уравнение траектории y = f(x).

Решение. Закон изменения скорости движения имеет вид $\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j}.$

Проекции скорости υ_x и υ_y связаны с координатами x и y соотношениями

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \text{ и } \upsilon_y = \frac{dy}{dt}.$$

Отсюда

$$dx = \upsilon_x dt = adt\,. \tag{1}$$

и

$$dy = bx^2 dt. \qquad (2)$$

Проинтегрировав (1) с учетом начальных условий, имеем

$$x = at. \qquad (3)$$

Подставив (3) в (2), получим

$$dy = a^2 b t^2 dt \qquad (4)$$

Проинтегрировав (4) с учетом начальных условий, найдем

$$y = \frac{a^2 b t^3}{3}.$$

Чтобы получить уравнение траектории, необходимо из уравнений (1) и (2) исключить параметр t. После несложных преобразований получим искомое уравнение траектории

$$y = \frac{bx^3}{3a}.$$

Ответ: $y = \frac{bx^3}{3a^2}.$

<u>Пример 8</u>. Скорость движения материальной точки. Две частицы движутся с ускорением g в однородном поле тяжести. В начальный момент времени частицы находились в одной точке и имели скорости υ_1=3,0 м/с и υ_2= 4,0 м/с, направленные горизонтально и в противоположные стороны. Найдите расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярны.

Решение. Скорость частиц изменяется по закону $\vec{\upsilon}_1 = \vec{\upsilon}_{10} + \vec{g}t$ **и** $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_{20} + \vec{g}t$ **.** Поэтому при движении горизонтальные составляющие скоростей частиц не изменяются. Поскольку за одно и тоже время частицы по вертикали сместятся на одинаковое расстояние, то расстояние между частицами в момент, когда векторы их скоростей окажутся взаимно перпендикулярны **,** равно $s = (\upsilon_{10} + \upsilon_{20})t.$ Время t найдем из условия $(\vec{\upsilon}_1 \vec{\upsilon}_2) = 0.$

$(\vec{\upsilon}_1 \vec{\upsilon}_2) = (\vec{\upsilon}_{10} + \vec{g}t)\,(\vec{\upsilon}_{20} + \vec{g}t) = -\upsilon_{10}\upsilon_{20} + g^2 t^2 = 0.$ Тогда $t = \frac{\sqrt{\upsilon_{10}\upsilon_{20}}}{g}.$ Следовательно,

$$s = (\upsilon_{10} + \upsilon_{20})\frac{\sqrt{\upsilon_{10}\upsilon_{20}}}{g} = 2{,}47 \text{ м.}$$

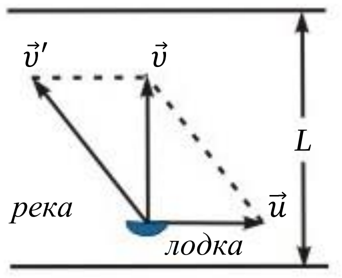
Ответ: $s = (\upsilon_{10} + \upsilon_{20})\frac{\sqrt{\upsilon_{10}\upsilon_{20}}}{g} = 2{,}47$ м.

<u>Пример 9.</u> Лодка движется по реке перпендикулярно берегу со скоростью υ = 2 м/с. Скорость течения реки u = 1 м/с. Ширина реки L = 90 м. Определить время, за которое лодка переплывет реку.

Дано:
υ = 2 м/с
u = 1 м/с
<u>L = 90 м.</u>

Решение:
υ – это скорость лодки относительно подвижной системы отсчета K. В данной задаче подвижная система отсчета это река.

t–?



u – скорость подвижной системы отсчета (скорость реки) относительно неподвижной системы отсчета (берега). Результирующая скорость равна:

$$\vec{v} =: \vec{v}' + \vec{u}.$$

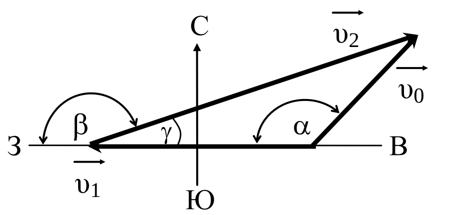
Время движения лодки можно найти: $t = L/v$.

Из рисунка видно, что $v = \sqrt{v'^2 - u^2}$.

$$\frac{L}{\sqrt{v'^2 - u^2}} = \frac{90}{\sqrt{4-1}} = \frac{90}{\sqrt{3}} = 51{,}9c$$

Ответ: 51,9 с.

<u>**Пример 10.**</u> **Теорема сложения скоростей Галилея. Относительность движения.** Корабль идет на запад со скоростью $\upsilon_1 = 6{,}5$ м/с. Известно, что ветер дует с юго-запада. Скорость ветра, зарегистрированного приборами относительно палубы корабля, равна $\upsilon_2 = 9{,}3$ м/с. Определите скорость ветра υ_0 относительно Земли. Какое направление ветра показывали приборы относительно курса корабля?



Решение. По теореме сложения скоростей Галилея **с**корость ветра относительно Земли $\vec{\upsilon}_0$ – векторная сумма скорости корабля $\vec{\upsilon}_1$ и скорости ветра относительно корабля $\vec{\upsilon}_2$, т.е. $\vec{\upsilon}_0 = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2$.

Поскольку $\vec{\upsilon}_2 = \vec{\upsilon}_0 - \vec{\upsilon}_1$, то

$$\upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + \upsilon_0^2 - 2\upsilon_1\upsilon_0\cos\alpha . \qquad (1)$$

Решая квадратное уравнение относительно υ_0, найдем $\upsilon_0 = 3{,}5$ м/с.

По теореме синусов находим искомый угол $\beta = 180° - \gamma$ и его числовое значение.

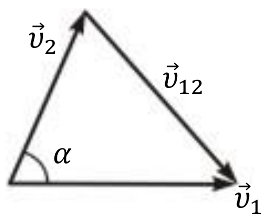
$$\frac{\upsilon_0}{\sin\gamma} = \frac{\upsilon_2}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \arcsin\left(\frac{\upsilon_0}{\upsilon_2}\sin\alpha\right) \approx 15°.$$

Откуда $\beta = 180° - 15° = 165°$. **Ответы:** $\upsilon_0 = 3{,}5$ м/с; $\beta = 165°$.

<u>**Пример 11.**</u> Два тела движутся прямолинейно со скоростями $\upsilon_1 = 2$ м/с, $\upsilon_2 = 3$ м/с. Угол между векторами $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$ равен 60°. Найти скорость первого тела относительно второго тела.

Дано:
$\upsilon_1 = 2$ м/с
$\upsilon_2 = 3$ м/с
$\alpha = 60^0$

$|\upsilon_{1,2}|$ - ?



Решение:

Скорость первого тела относительно второго равна

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$|v_{1,2}|$ - можно найти по теореме косинусов:

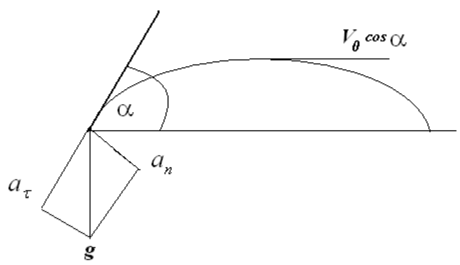
$$|\vec{v}_{12}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\alpha} = \sqrt{4 + 9 - 2 \cdot 6 \cdot 0{,}5} = \sqrt{7} = 2{,}65 \text{ м/с}$$

Ответ: $|\upsilon_{1,2}|$ = 2,65 м/с.

Пример 12. Криволинейное движение. Нормальное и тангенциальное ускорение. Камень брошен под углом $\alpha = 30^0$ с начальной скоростью $\upsilon_0 = 10$ м/с. Найдите:

1) нормальное a_n и тангенциальное a_τ ускорения в момент $t = 0$;
2) радиус кривизны траектории в верхней точке траектории.

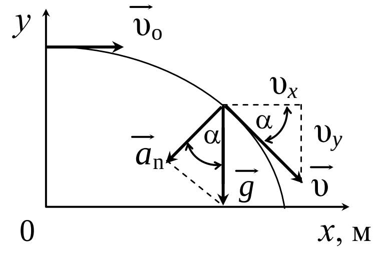
Решение. Поскольку высота верхней точки траектории $y << R_з$ (см. рисунок), то можно считать, что после броска камень движется в однородном поле тяжести Земли с полным ускорением $\vec{g}$. Тогда из чертежа $a_\tau = g\sin\alpha = 4{,}9$ м/с^2; $a_n = g\sin\alpha = 8{,}5$ м/с^2.



В верхней точке траектории скорость камня равна горизонтальной составляющей скорости $\upsilon = \upsilon_0 \cos\alpha$, так как тангенциальное ускорение и вертикальная составляющая скорости в верхней точке траектории равны нулю. Поэтому нормальное ускорение $a_n = g$ и радиус кривизны в верхней точке траектории

$$R = \frac{\upsilon^2}{a_n} = \frac{(\upsilon_0 \cos\alpha)^2}{g} = 7{,}7 \text{ м/с}^2.$$

Пример 13. Криволинейное движение. Воздушный шар начинает подниматься с поверхности земли. Скорость его подъема постоянна и равна υ_0. Благодаря ветру шар приобретает горизонтальную компоненту скорости $\upsilon_x = \alpha y$, где α – постоянная, y – высота подъема. Найдите зависимости от высоты подъема:



1) величины сноса шара $x(y)$;
2) полного, тангенциального и нормального ускорений шара.

Решение. Запишем элементарное приращение y – координаты за промежуток времени dt:

$dy = \upsilon_0 dt$. Отсюда $y = \upsilon_0 t$.

Тогда элементарное приращение x – координаты за промежуток времени dt:

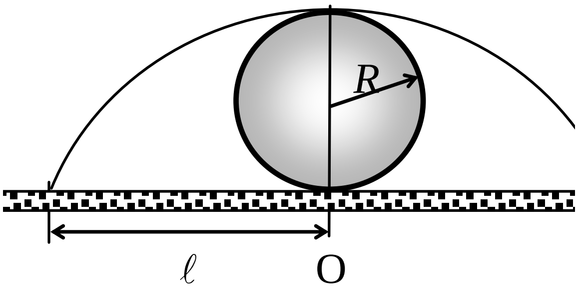
$dx = \alpha y = \alpha\ \upsilon_0 t\ dt.$ Тогда $x = \dfrac{\alpha\upsilon_0 t^2}{2}.$ Исключая из уравнений параметр $t,$ найдем $x = \dfrac{\alpha y^2}{2\upsilon_0}.$ Полное ускорение шара $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$. $a_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} = \alpha\upsilon_0$; $a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0.$

Следовательно $a = \alpha\upsilon_0.$ Тангенциальное ускорение $a_\tau = \dfrac{d\upsilon}{dt}.$ Скорость точки $\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}$; $\upsilon_y = \upsilon_0$ (по условию); $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} = \alpha\upsilon_0 t.$ Тогда: $\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 + (\alpha\upsilon_0 t)^2} = \upsilon_0\sqrt{1+\alpha^2 t^2}.$

Следовательно $a_\tau = \dfrac{\alpha^2\upsilon_o t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2.}} = \dfrac{\alpha^2 y}{\sqrt{1+(\alpha y/\upsilon_0)^2}}.$

Нормальное ускорение $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \dfrac{\alpha\upsilon_0}{\sqrt{1+(\alpha y/\upsilon_0)^2}}.$

Ответы: $x = \dfrac{\alpha y^2}{2\upsilon_0}$; $a = \alpha\upsilon_0$; $a_\tau = \dfrac{\alpha^2 y}{\sqrt{1+(\alpha y/\upsilon_0)^2}}$; $a_n = \dfrac{\alpha\upsilon_0}{\sqrt{1+(\alpha y/\upsilon_0)^2}}.$



<u>Пример 14</u>. На каком наименьшем расстоянии ℓ от точки О (см. рисунок) надо бросить камень с уровня земли, чтобы он перелетел через шар радиусом R = 5 м, коснувшись его только в высшей точке?

Поскольку движение по горизонтали равномерное, то

$$\ell = \upsilon_{\text{гор}} t. \tag{1}$$

Время движения:

$$h = \frac{gt^2}{2}; \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Указано, что

$$h = 2R; \qquad t = \sqrt{\frac{4R}{g}}. \tag{2}$$

В наивысшей точке окружности:

$$g = \frac{\upsilon_{\text{гор}}^2}{R}; \qquad \upsilon_{\text{гор}} = \sqrt{gR}. \tag{3}$$

Решена система уравнений (1) – (3):

$$\ell = \sqrt{gR}\cdot\sqrt{\frac{4R}{g}} = 2R = 10\ (\text{м}).$$

<u>Пример 15</u>. Средняя скорость движения. Частица движется в положительном направлении оси x так, что ее скорость изменяется по закону $\upsilon = \alpha\sqrt{x},$ где $\alpha -$

положительная постоянная. Имея в виду, что в момент $t=0$ она находилась в точке $x=0$, найдите среднюю скорость частицы за время, в течение которого она пройдет первые s метров пути.

Решение. Средняя скорость прохождения пути $\upsilon_{cp}=\frac{s}{t}=\frac{x}{t}$, так как частица движется в одном направлении. Поскольку $\upsilon=\frac{dx}{dt}$, то

$$\frac{dx}{dt}=\alpha\sqrt{x}. \qquad (1)$$

Разделив переменные, имеем

$$\frac{dx}{\sqrt{x}}=\alpha dt. \qquad (2)$$

Проинтегрировав (1) , получим

$$x=s=\frac{\alpha^2 t^2}{4}. \qquad (3)$$

Тогда средняя скорость прохождения пути

$$\upsilon_{cp}=\frac{\alpha^2 t}{4}. \qquad (4)$$

Из уравнения (3)

$$t=\frac{2\sqrt{s}}{\alpha}. \qquad (5)$$

Подставив (5) в (4), найдем $\upsilon_{cp}=\frac{\alpha\sqrt{s}}{2}$.

Ответ: $\upsilon_{cp}=\frac{\alpha\sqrt{s}}{2}$.