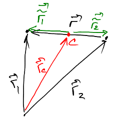
§ Система центра масс

Центр масс – ... (Ц-система)

Связь м/у Ц и Л-систем

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$



1) координаты ч-ц:

$$\vec{\tilde{r}}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_c = \ldots = \frac{m_2}{M} \cdot \vec{r}$$

$$\vec{\tilde{r}}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_c = \ldots = -\frac{m_1}{M} \cdot \vec{r}$$

$\Rightarrow$ точка C (центра масс) делит $\vec{r}$ в отношении масс m_1/m_2

2) Скорости ч-ц:

$$\vec{\tilde{V}}_1 = \frac{d\vec{\tilde{r}}_1}{dt} = \frac{m_2}{M} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{m_2}{M} \cdot \vec{V}$$

$$\vec{\tilde{V}}_2 = \frac{d\vec{\tilde{r}}_2}{dt} = -\frac{m_1}{M} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{m_1}{M} \cdot \vec{V}$$

где: $\vec{V} \equiv \vec{V}_{отн} \equiv \frac{d}{dt}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$ – скорость относит. движе-я частиц

3) Импульсы:

$$\vec{\tilde{p}}_1 = m_1 \cdot \vec{\tilde{V}}_1 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{V} = \mu \cdot \vec{V}$$

$$\vec{\tilde{p}}_2 = m_2 \cdot \vec{\tilde{V}}_2 = -\mu \cdot \vec{V}$$

$\Rightarrow$ в Ц-сист. импульсы частиц равны по модулю и $\uparrow\downarrow$ по направл.

$\Rightarrow$ суммарн. импульс $= 0$

4) Суммарная кин. эн-я:

$$\tilde{T} = \frac{m_1 \cdot \tilde{V}_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot \tilde{V}_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot m_2^2 \cdot V^2 + m_2 \cdot m_1^2 \cdot V^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{\cancel{(m_1 + m_2)}\, m_1 \cdot m_2 \cdot V^2}{2 \cdot \cancel{(m_1 + m_2)^2}} = \frac{\mu \cdot V^2}{2}$$

В начальн. момент:

кин.: $$\tilde{T}_0 = \frac{\mu \cdot V_0^2}{2} = \frac{\mu \cdot (\vec{V}_{10} - \cancelto{0}{\vec{V}_{20}})^2}{2} = \frac{\mu \cdot V_{10}^2}{2} = \frac{m_2}{M} \cdot T_0$$

импульс: $$\vec{\tilde{p}}_{10} = -\vec{\tilde{p}}_{20} = \mu \cdot \vec{V} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{V}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{p}_{10}$$

Рассм. упругий удар 2х частиц в Ц-системе:

д. выполн. зак. сохр. полн. эн-и частиц:

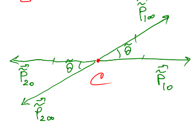
$$\tilde{T}_{10} + \tilde{T}_{20} = \tilde{T}_{1\infty} + \tilde{T}_{2\infty} \qquad T = \frac{p^2}{2m}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{p}_{10}^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_{20}^2}{2m_2} = \frac{\tilde{p}_{1\infty}^2}{2m_1} + \frac{\tilde{p}_{2\infty}^2}{2m_2}$$

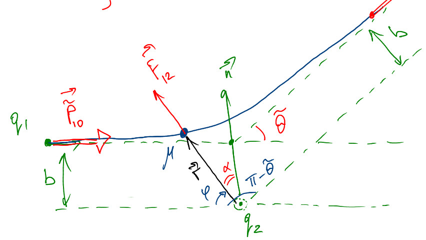
т.к. $\vec{\tilde{p}}_{10} = -\vec{\tilde{p}}_{20}$; $\vec{\tilde{p}}_{1\infty} = -\vec{\tilde{p}}_{2\infty}$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{p}_{10}^2}{2\mu} = \frac{\tilde{p}_{1\infty}^2}{2\mu} \Rightarrow |\vec{\tilde{p}}_{10}| = |\vec{\tilde{p}}_{1\infty}|$$

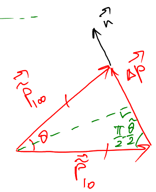
$\Rightarrow$ в рез. упруг. столкнов-я импульс ч-ц лишь поворачив-ся на угол $\tilde{\theta}$ по модулю не меняется.



§ Угол рассеяния



с другой стороны:



$$\frac{\Delta p}{2} = \tilde{p}_{10}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\tilde{\theta}}{2}\right) = $$

$$= \tilde{p}_{10}\cdot\sin\frac{\tilde{\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |\Delta\vec{\tilde{p}}| = |\vec{\tilde{p}}_{10}' - \vec{\tilde{p}}_{10}| = 2\cdot\tilde{p}_{10}\cdot\sin\frac{\tilde{\theta}}{2}$$

Но изменение импульса вызвано действием силы $\vec{F}_{12}$

$$\Rightarrow \quad d\vec{\tilde{p}}_1 = \vec{F}_{12}\cdot dt$$

интегрируя по времени: $\Delta\vec{\tilde{p}} = \int \vec{F}_{12}\cdot dt$

интеграл от составляющей силы, $\perp$ направлению $\Delta\vec{p}$, будет равным нулю из-за симметрии траектории

$$\Rightarrow \quad |\Delta\vec{\tilde{p}}| = \int F_n\cdot dt = \int \frac{z_1\cdot z_2\cdot e^2}{r^2}\cdot\cos\alpha\cdot dt$$

где: F_n – проекция $\vec{F}_{12}$ на направление $\Delta\vec{p}$

из рис.: $\alpha+\varphi = \frac{\pi-\tilde{\theta}}{2}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{2}-\frac{\tilde{\theta}}{2}-\varphi$

$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ замена: $dt = \frac{d\varphi}{\dot{\varphi}} \Rightarrow$

$$|\Delta\vec{\tilde{p}}| = \int \frac{z_1\cdot z_2\cdot e^2}{r^2}\cdot\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)}{\dot{\varphi}}\cdot d\varphi$$

$\vdots$

$$\mathrm{tg}\,\frac{\tilde{\theta}}{2} = \frac{z_1\cdot z_2\cdot e^2}{2\cdot b\cdot T_0}$$