§ Квантование момента импульса

$$\hat{\vec{L}} = [\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}] = -i\hbar[\vec{r}, \vec{\nabla}]$$ – сложное выражение

Вводят оператор квадрата момента импульса: $\hat{\vec{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

Оказывается: $$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = \hat{L}_x \hat{L}_y - \hat{L}_y \cdot \hat{L}_x = -\hbar^2 \cdot \left\{ \left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) - \left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} = \ldots = -\hbar^2\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\cdot\hbar\cdot\hat{L}_z$$

$\Rightarrow$ $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\cdot\hbar\cdot\hat{L}_z$ тоже самое $\overset{y}{x \circlearrowright z}$

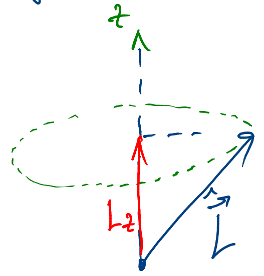
Но! $[\hat{\vec{L}}^2, L_i] = 0$ $\quad i = \{x, y, z\}$

⇒ одновременно можно определить $\hat{\vec{L}}^2$ и одну из проекций на координатн. ось

Две другие другие проекции – неопределённы.

Выбирают: $\hat{L}_z$ и $\hat{\vec{L}}^2$

Векторная модель:

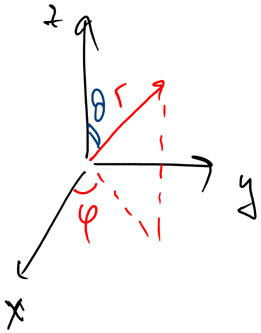


Ур-е квантования для $\hat{\vec{L}}^2$:

$$\hat{\vec{L}}^2 Y = L^2 \cdot Y$$

В сферическ. системе:

$$\hat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2 \cdot \Delta_{\theta,\varphi} \quad ; \quad \text{где:} \quad \Delta_{\theta,\varphi} \equiv \frac{1}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \cdot \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$



$Y = Y(\theta, \varphi)$

– шаровые функции

Результат: Решение возможно, если собствен. знач-я оператора квадрата момента импульса равны:

$$L^2 = l \cdot (l+1) \cdot \hbar^2 \qquad l = 0, 1, 2, \dots$$

l – „орбитальное (азимутальное) квант. число"

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \qquad Y(\theta, \varphi) = \Psi(\theta) \cdot \Phi(\varphi)$$

– модуль момента импульса

$$\hat{\vec{L}}^2 \, Y(\theta, \varphi) = \hbar^2 \cdot l \cdot (l+1) \cdot Y(\theta, \varphi)$$

Другое ур-е для $\hat{L}_z$: $\hat{L}_z \Phi = L_z \cdot \Phi$ – простое, рассмотрим

сфер. системе: $\hat{L}_z = -i\hbar \dfrac{\partial}{\partial \varphi}$

$$-i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = L_z \cdot \phi$$

Пусть $\phi = e^{\alpha \cdot \varphi} \Rightarrow -i \cdot \hbar \cdot \alpha = L_z \Rightarrow \alpha = \frac{i \cdot L_z}{\hbar} \Rightarrow \Phi(\varphi) = C \cdot e^{i \cdot \frac{L_z}{\hbar} \cdot \varphi}$

Функция $\phi(\varphi)$ д. быть однозначной $\Rightarrow \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$

$$\Rightarrow C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \cdot (\varphi + 2\pi)} = C \cdot e^{i \frac{L_z}{\hbar} \cdot \varphi} \Rightarrow e^{i \cdot \frac{L_z 2\pi}{\hbar}} = 1$$

$$\Rightarrow L_z = m \cdot \hbar$$

$$m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2, \ldots$$

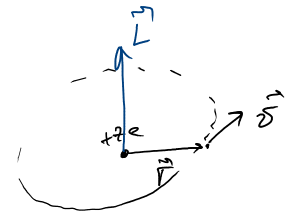
m – „магнитное квантовое число"

+ Условие нормировки: $\displaystyle\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi) \cdot \Phi_{m'}(\varphi) \cdot d\varphi = \delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & m = m' \\ 0, & m \neq m' \end{cases}$

$$\Rightarrow C_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Rightarrow \Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{i \cdot m \cdot \varphi}$$

т.к. Проекция вектора не м. превзойти длину вектора:

$$|m\hbar| \le \hbar\sqrt{l(l+1)} \Rightarrow |m_{max}| = l$$



Итак,

$$\begin{cases} L = \hbar\sqrt{l(l+1)} & l = 0, 1, 2, \dots \\ L_z = m\hbar & m = 0;\ \pm 1;\ \pm 2, \dots, \pm l \end{cases}$$

1) Момент импульса = орбитальный момент импульса = связан с движением частицы по траектории.

2) По аналогии вводят Собственный момент импульса частиц – связан с вращением частиц вокруг собственной оси = Спин!

обозначают: $\hat{S}$ $\Leftrightarrow$ выражение для $\hat{S}$ получается такое, что и для $\hat{\vec{L}}$

$\Rightarrow$ Собствен. знач-е для модуля спина: $S = \hbar\sqrt{s(s+1)}$

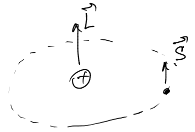
для z-проекции: $S_z = m_s \hbar$

s – спиновое квант. число: $\underbrace{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots}_{\text{фермионы}}$, $\underbrace{1, 2, \dots}_{\text{бозонов}}$

$m_s = -s, \dots, 0, \dots +s$

m_s – магнитное спиновое квант. число

3) Вводят полный механич. момент. (полный момент импульса), $\vec{J}$



$$J = \hbar \cdot \sqrt{j(j+1)}$$

j - полное кв. число;

$$j = |l-s| \ldots |l+s|$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$J_z = m_j \cdot \hbar \quad ; \quad m_j = -j \ldots 0 \ldots j$$

m_j - магнитное полное кв. число

Поскольку $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_i] = 0$ „коммутируют"

$\Rightarrow$ L^2, L_z имеют общую систему функций:

$$\hat{L}_\varphi \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i m \varphi}$$

$$\hat{L}^2 \to Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} \cdot e^{i m \varphi} \cdot P_l^m(\cos\theta)$$

где: $P_l^m(\cos\theta)$ - присоединённые полиномы Лежандра

их м. сгенерировать:

$$P_l^m(\xi) = \frac{1}{2^l l!} \cdot (1-\xi^2)^{m/2} \cdot \frac{d^{l+m}}{d\xi^{l+m}} (\xi^2 - 1)^l$$

!

1. Простой эф. Зеемана
2. Сложный эф. Зеемана
3. Опыт Штерна и Герлаха
4. Квазиклассическ. приближ-е. Метод ВКБ
5. Электрон в потенц. яме конечной глубины.
6. Решение простейших задач в сфер. координатах: Ротатор
7. Общая теория движ-я частиц в центр.-симмет. поле: Шаровые функции
8. Эф. Штарка