Теорема Остроградского – Гаусса

Если произвольная поверхность окружает ***k***– зарядов, то согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k$$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{k} E_{ni}\right) \cdot dS = \sum_{i=1}^{k} \oint_S E_{ni} dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

Теорема доказана!!!!

Теорема Гаусса в интегральной форме

Если внутри поверхности имеется каким-то образом распределенный заряд с объемной плотностью $\boldsymbol{\rho}$

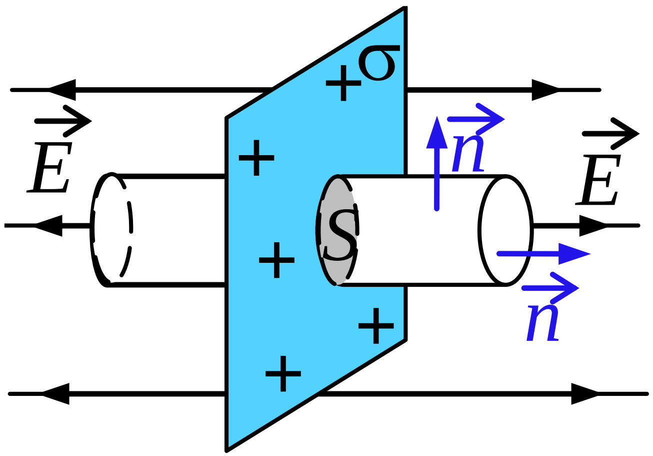
$\boldsymbol{\rho = dq/dV}$,   Кл/м^3

то суммарный заряд, заключенный внутри поверхности площадью $\mathbf{S}$, охватывающей объем $\mathbf{V}$:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$$\oint_S E_n dS = \int_{S_{бок}} E_n dS_{бок} + 2\int_{S_{осн}} E_n dS_{осн} =$$

$$\int EdS_{бок}\cos 90^0 + 2\int EdS_{осн}\cos 0^0 = 2ES_{осн}$$

Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

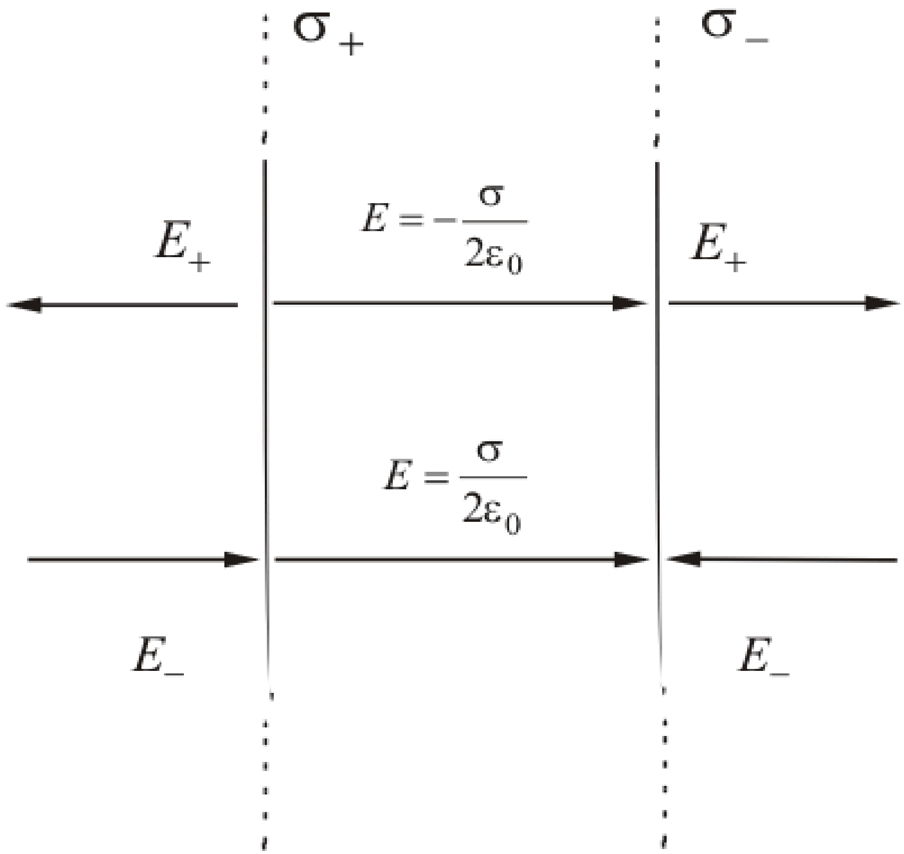
$$dq = \sigma dS, \quad \sum_{i=1}^{N} q_i = \int \sigma dS = \sigma S_{осн}.$$

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

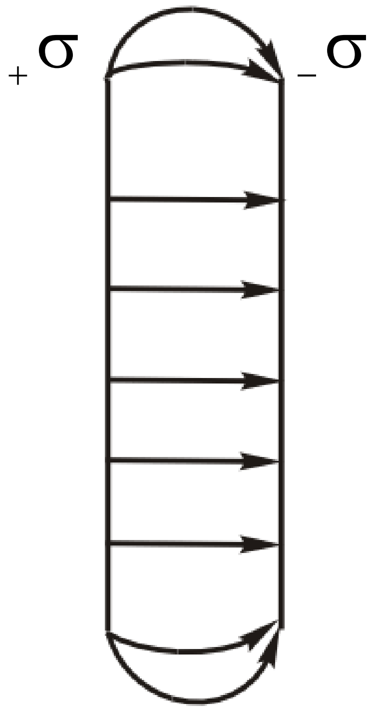
2. <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

2. <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>

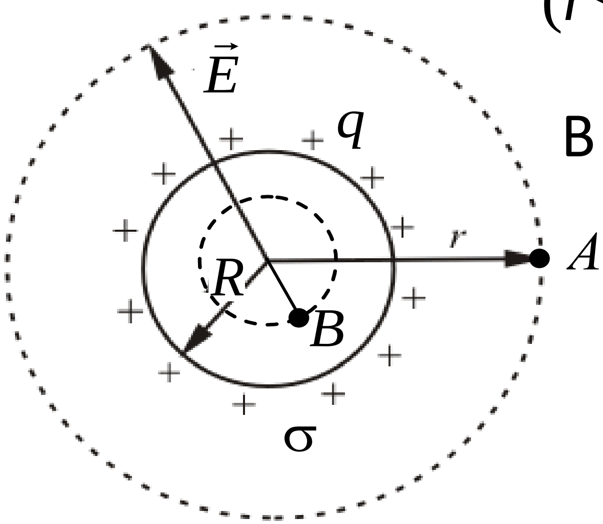


$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

3. Поле, образованное заряженной сферической поверхностью

В точке $\boldsymbol{B}$ напряженность будет равна нулю ($r<R$).



В точке A ($r>R$) **:** $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

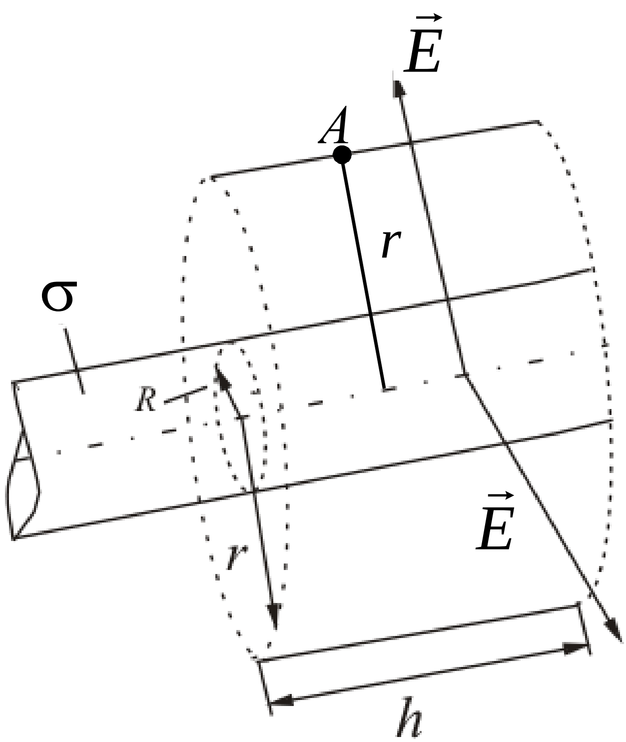
$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

$$q = \sigma 4\pi R^2$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$$

Применение теоремы Гаусса

4. Поле, образованное бесконечно длинным заряженным цилиндром



$$E(r)2\pi rh = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

В точке $A\ (r>R)$: $\quad q = \sigma 2\pi Rh$

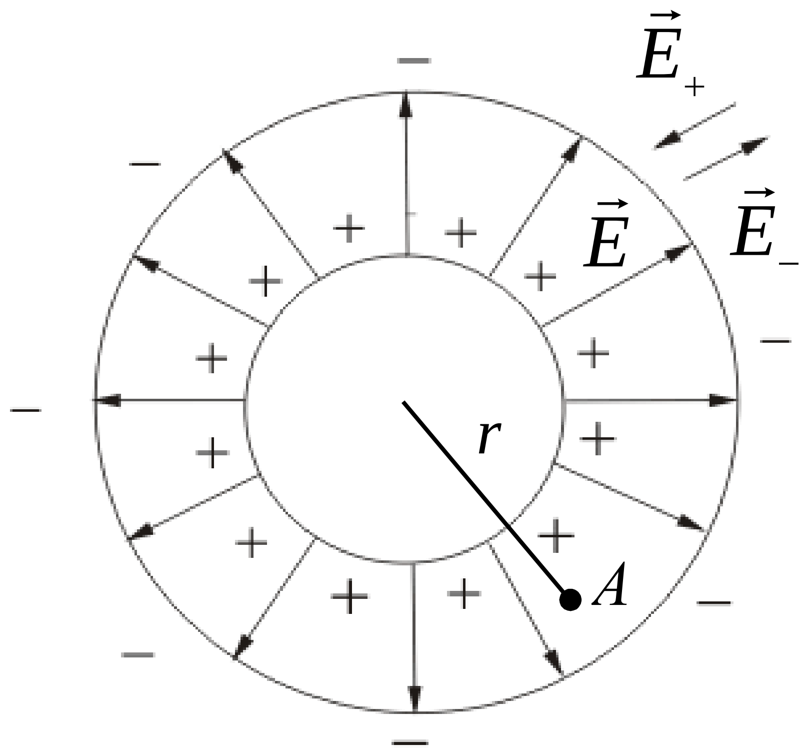
$$\boxed{E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}}$$

Если $(r<R)$: $\quad q = 0$

$$\boxed{E = 0}$$

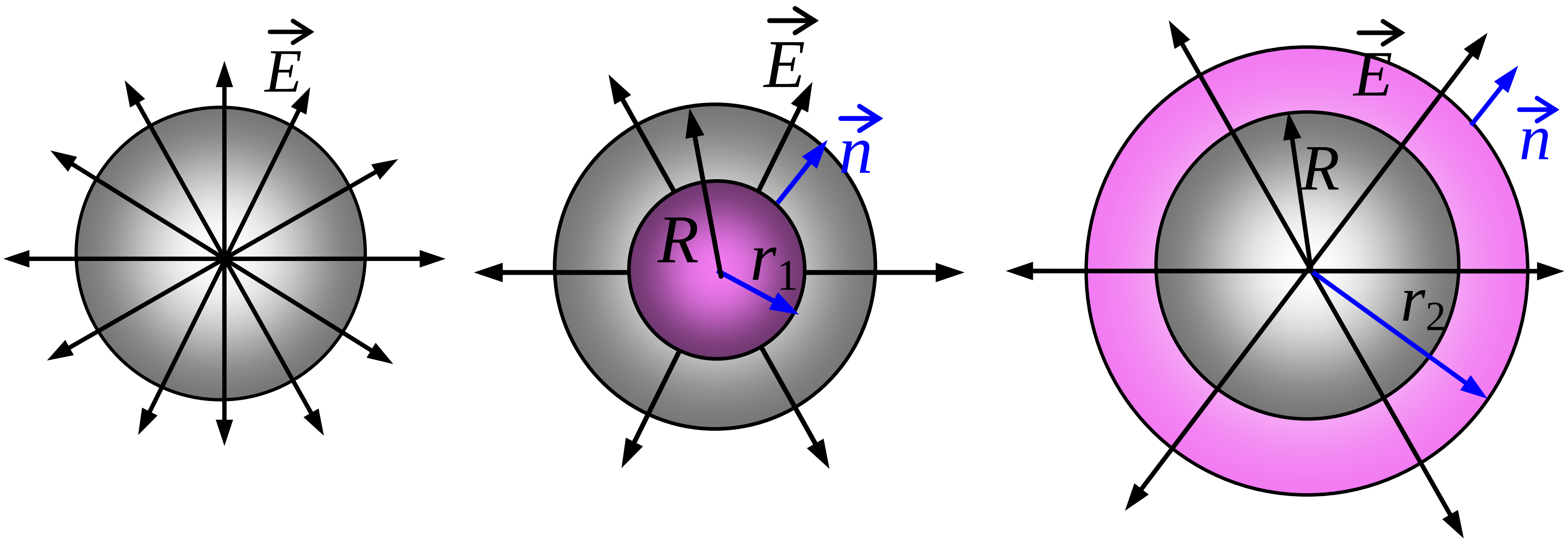
Применение теоремы Гаусса

5. Поле, образованное двумя цилиндрическими поверхностями, заряженными одинаковыми разноименными зарядами



Применение теоремы Гаусса

5. Поле объемного заряженного шара



Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Дивергенция

Дивергенцией вектора $\vec{A}$ (обозначается $div\vec{A}$) в какой-либо точке поля M называется, предел отношения потока вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую точку M , к объему ΔV части поля, ограниченной поверхностью S, при неограниченном уменьшении ΔV:

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{A} d\vec{S} \right)$$

Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $\langle \rho \rangle$. Тогда по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \text{ или } \oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0}$$

При $\Delta V \to 0;$ $\dfrac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0} \to \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, а величина потока вектора напряженности

$$div\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right)$$

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Дивергенция

Дивергенция является скалярной функцией координат.

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Или через оператор Набла:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

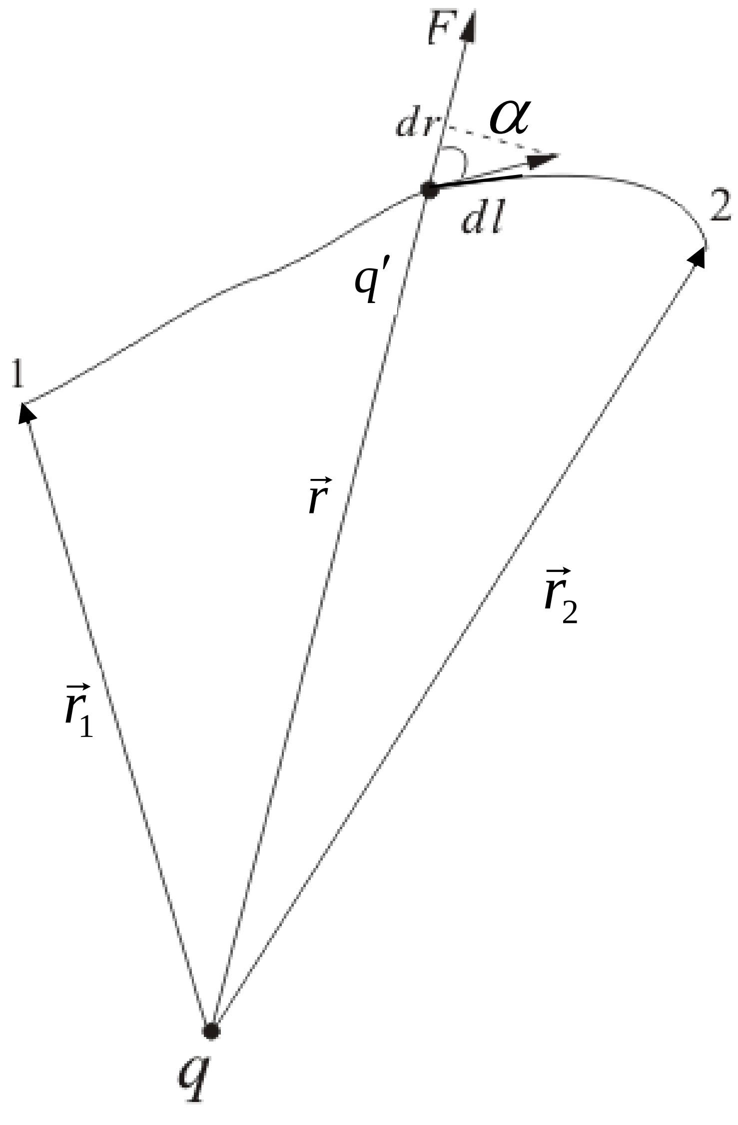
$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.}$$

В тех точках поля, где $div\vec{E} > 0$ - положительные заряды (истоки)

$div\vec{E} < 0$ - отрицательные заряды (стоки).

ПОТЕНЦИАЛ
И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Работа сил электростатического поля

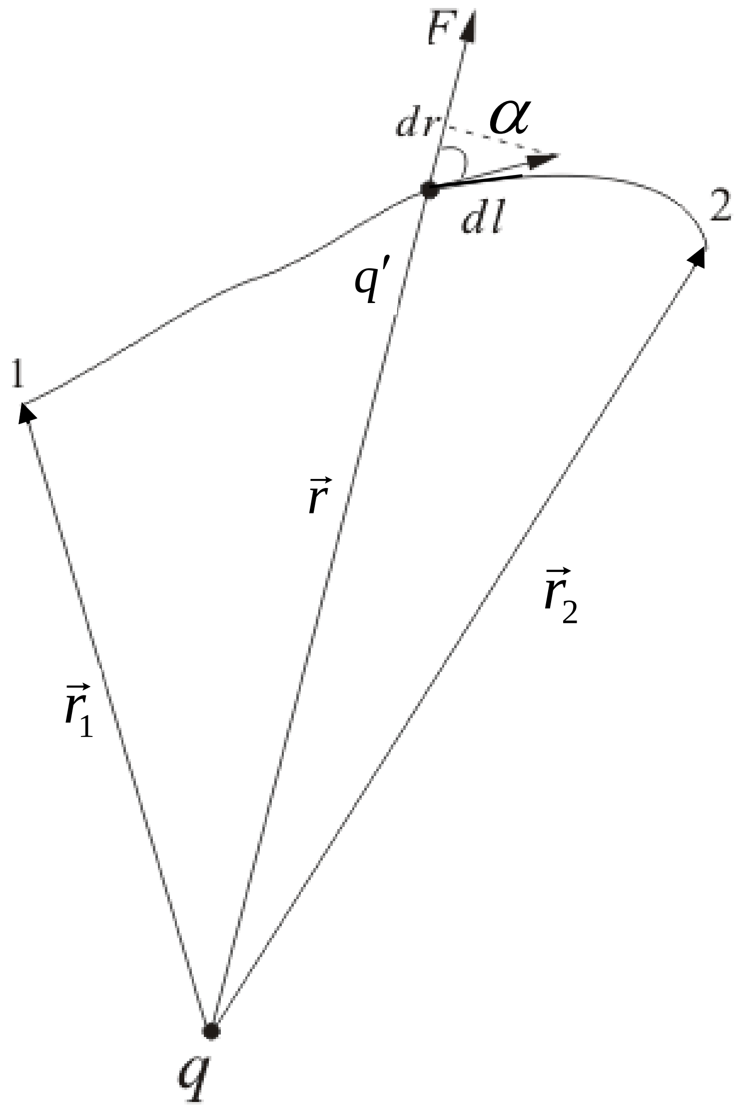


- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным зарядом $\boldsymbol{q}$.

- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд $\boldsymbol{q'}$ действует сила $\boldsymbol{F}$.

$$dA = (\vec{F} d\vec{l}\,)$$

Работа сил электростатического поля



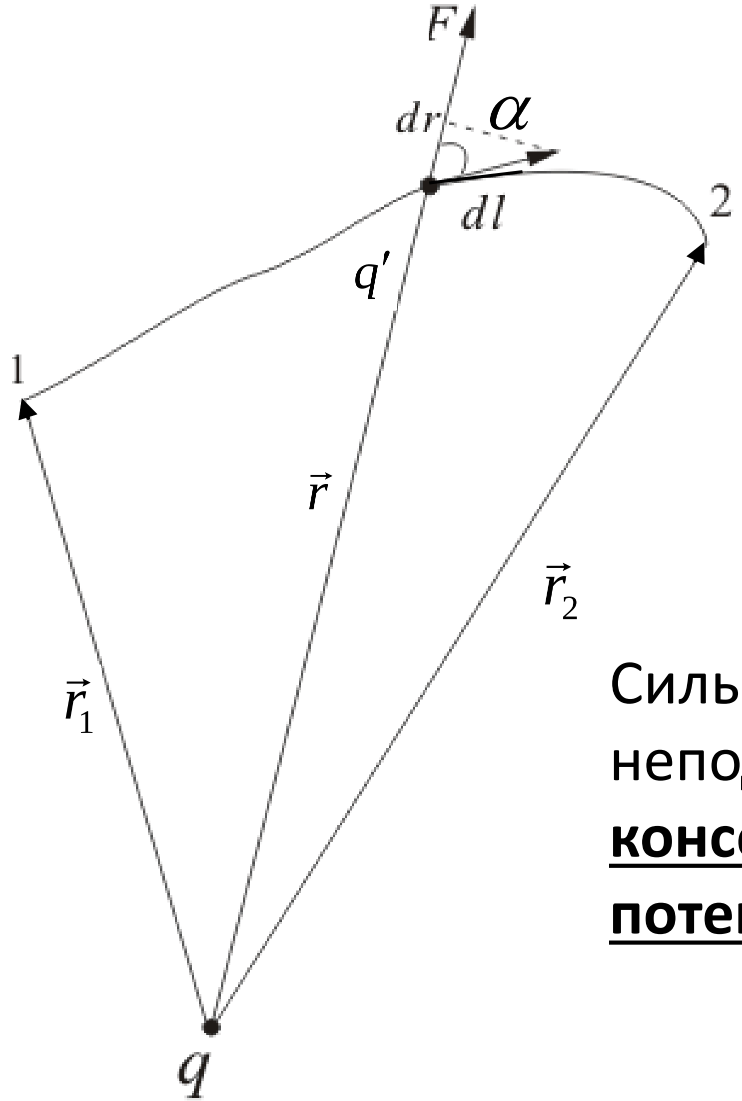
$$dA = Fdl\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dl\cos\alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}dr$$

$$dl\cos\alpha = dr$$

Работа сил электростатического поля



$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Силы, действующие на заряд q' в поле неподвижного заряда q, являются **консервативными**, а поле этих сил **потенциальным.**

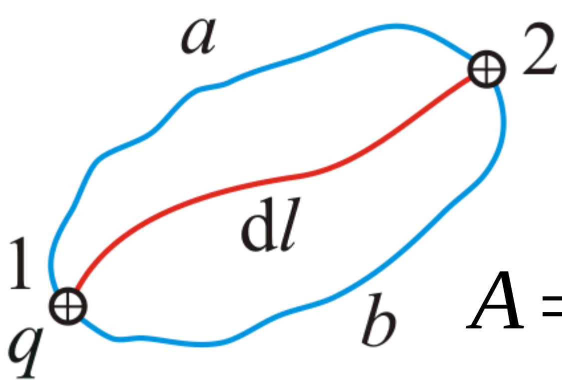
Работа сил электростатического поля

$$A = \oint q' E_l \, dl = 0$$

$$\boxed{\oint E_l \, dl = 0}$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

$$\int_{1a}^{2} (\vec{E} \mathrm{d}\vec{l}\,) = \int_{2б}^{1} (\vec{E} \mathrm{d}\vec{l}\,)$$



$$A = q \oint (\vec{E} d\vec{l}\,) = q \int_{1}^{2} (\vec{E} d\vec{l}\,) - q \int_{2}^{1} (\vec{E} d\vec{l}\,) = 0.$$

Работа сил электростатического поля

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Выводы:

- Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми:

$$\boxed{\oint E_l dl = 0}$$

- Электростатическое поле не вихревое.

есть следствие потенциального характера электростатического поля.

Теорема Стокса. САМОСТОЯТЕЛЬНО!!!

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в поле потенциальных сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля.

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r_2} = W_{P_1} - W_{P_2}$$

$$F = -\frac{dW_P}{dr} \quad \rightarrow \quad dW_P = -Fdr$$

$$W_P = -\int \frac{qq'dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + const = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r} + const$$

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$\boxed{W_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}}$$

Потенциальная энергия

$$\boxed{\varphi = \frac{W_P}{q_{np}}}$$

Потенциал

Потенциал в точке электростатического поля – физическая величина численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку. В системе СИ [В = Дж/Кл].

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$\boxed{\varphi = \frac{W_P}{q_{np}}}$$

потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}}$$

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

Если поле создано системой точечных зарядов $\boldsymbol{q_1}$, $\boldsymbol{q_2}$, …, $\boldsymbol{q_n}$, находящихся на расстояниях соответственно $\boldsymbol{r_1}$, $\boldsymbol{r_2}$,…, $\boldsymbol{r_n}$ до точки поля, в которой находится заряд $\boldsymbol{q'}$, то работа:

$$A_{12} = \sum A_i$$

$$A_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}}\right)$$

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i q'}{r_{i2}}$$

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2}$$

$$W_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i q'}{r_i}$$

$$\varphi = \frac{W_P}{q'} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен **алгебраической сумме потенциалов**, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{np}} \quad \Rightarrow \quad W_p = q\varphi$$

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$A_\infty = q\varphi \qquad\qquad \varphi = \frac{A_\infty}{q}$$

Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля в бесконечность

или

работе, которую надо совершить *против сил* электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$dA = qE_l dl \qquad dA = -qd\varphi$$

$$qE_l dl = -qd\varphi$$

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$$

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \qquad E_y = -\frac{d\varphi}{dy} \qquad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{E} = \vec{i}\,E_x + \vec{j}\,E_y + \vec{k}\,E_z = -\left(\vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}\right)$$

Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$\overrightarrow{grad}\varphi = \vec{i}\,\frac{d\varphi}{dx} + \vec{j}\,\frac{d\varphi}{dy} + \vec{k}\,\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E} &= -\overline{grad}\ \varphi \\ \vec{E} &= -\nabla\ \varphi \end{aligned}}$$

связь потенциала с напряженностью

градиент – это вектор, показывающий направление наискорейшего изменения (возрастания) некоторой величины

Знак "–" указывает на то, что напряженность направлена в сторону убывания потенциала.

Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

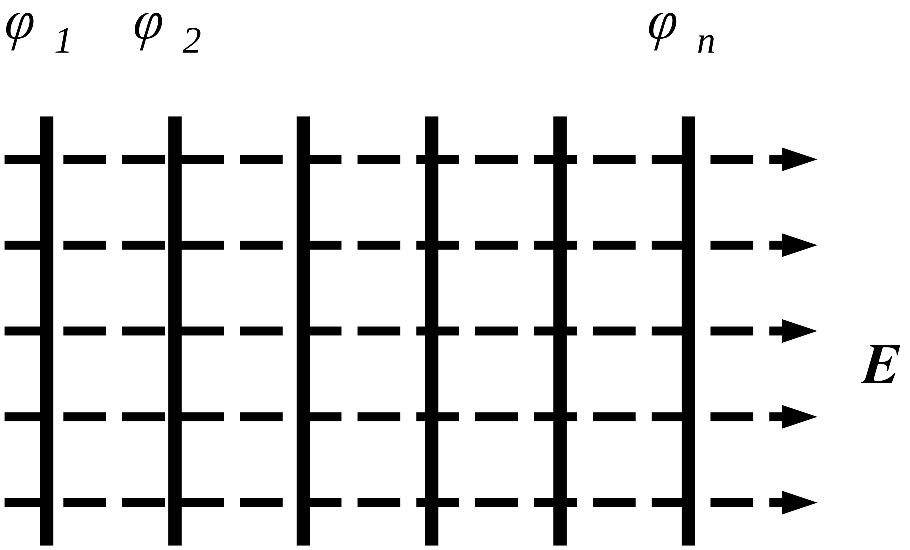
$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overline{grad}\;\varphi}$$

Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или ***эквипотенциальной*** поверхностью.

Для однородного поля



Эквипотенциальные поверхности

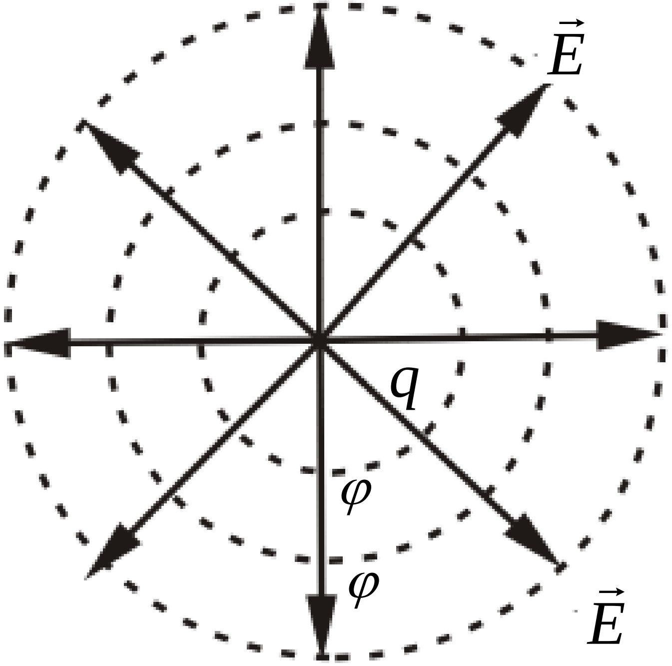
Для точечного заряда

$\varphi = const.$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$A_{12} = q\int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}\,)$$

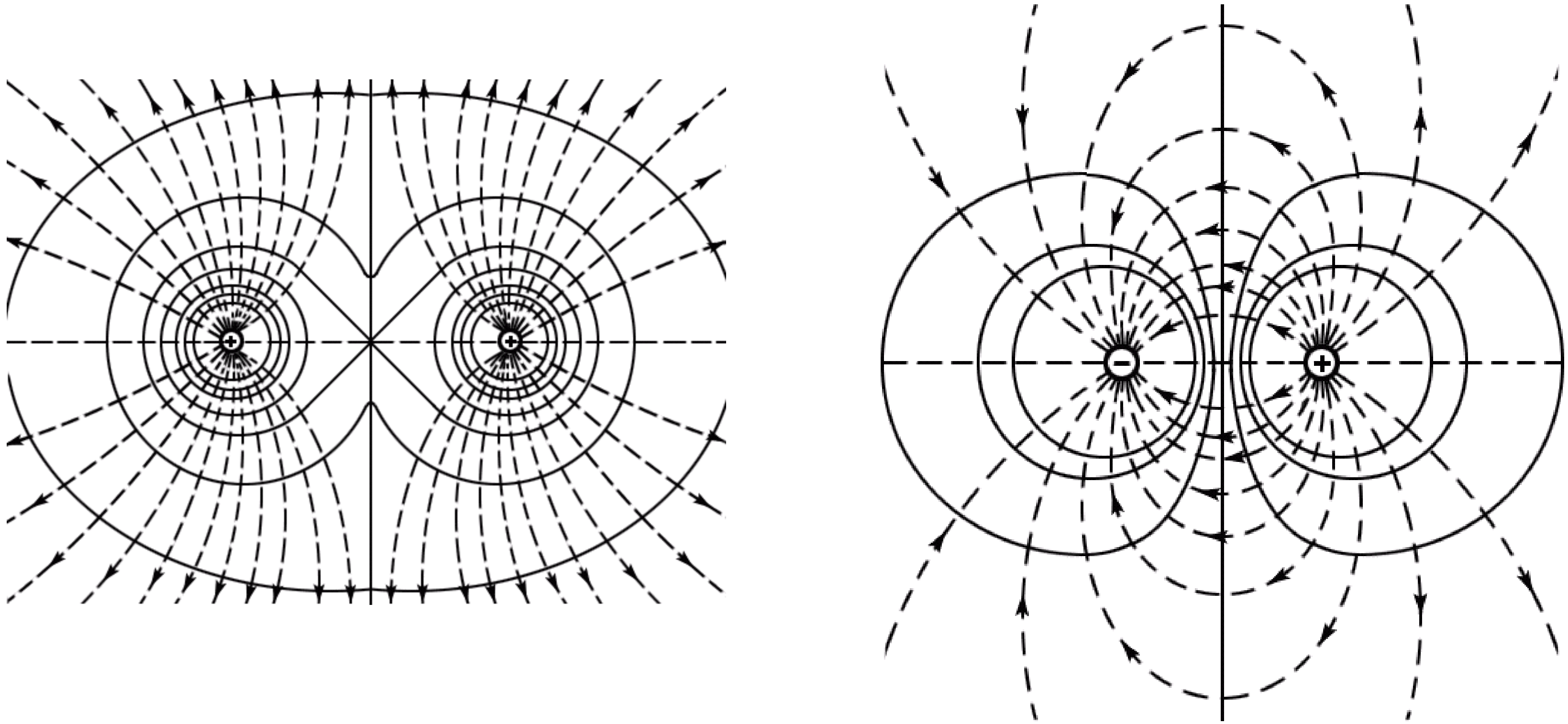
$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$



$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}\,) \longrightarrow \oint (\vec{E}, d\vec{l}\,) = 0$$

$$\cos\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = 90^\circ$$

Эквипотенциальные поверхности



а *б*

Эквипотенциальные поверхности
поля двух равных одноименных зарядов (*а*) и диполя (*б*).
Пунктиром показаны силовые линии.

Эквипотенциальные поверхности

Прямая задача: $\vec{E} = -\overline{grad}\,\varphi$

Обратная задача: $d\varphi = -(\vec{E}, d\vec{l})$ или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) \qquad \boxed{\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0}$$

Уравнение Пуассона:

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},} \quad \boxed{\vec{E} = -\overline{grad}\,\varphi} \longrightarrow \boxed{div(\overline{grad}\,\varphi) = \boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$ - оператор Лапласа.

Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

1. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

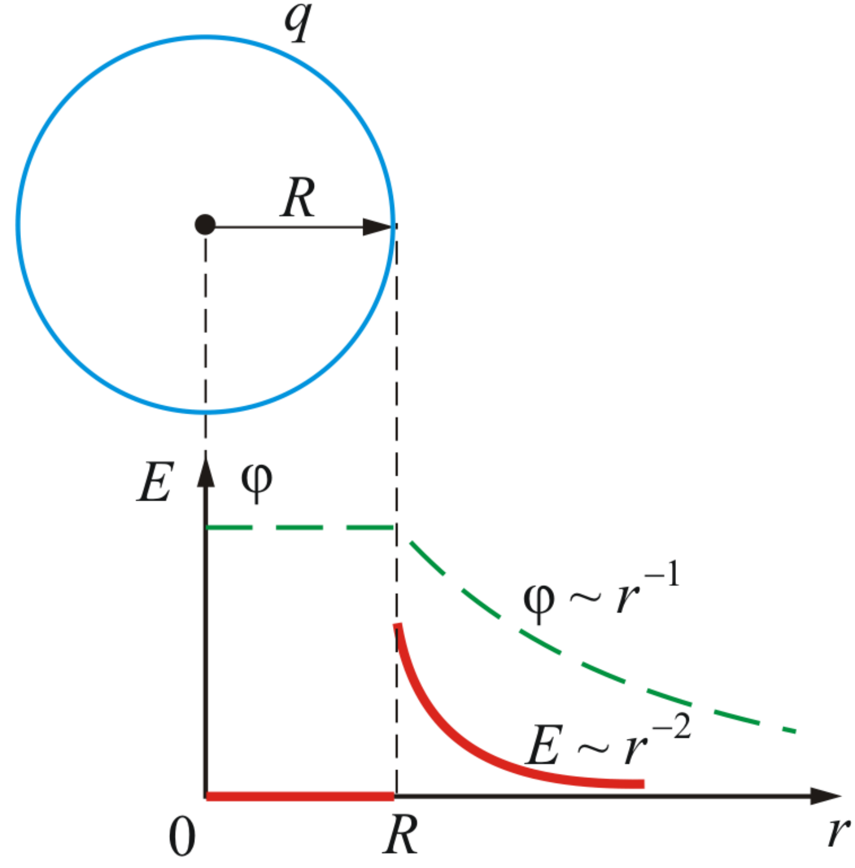
$$\Phi_E = \oint\limits_s E\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\mathrm{d}\varphi = -E\mathrm{d}r$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \textit{вне сферы}\ (r > R). \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0} = const - \textit{внутри и на поверхности сферы}\ (r \le R) \end{cases}$$



Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

2. Поле бесконечно длинной равномерно заряженной цилиндрической поверхности:

$$\Phi_E = \oint_s E\mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R} \text{ или } \dfrac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \text{ или } \dfrac{\mathrm{q}}{2\pi\varepsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases}$$

$$E = -grad\varphi$$

Цилиндрическая система координат

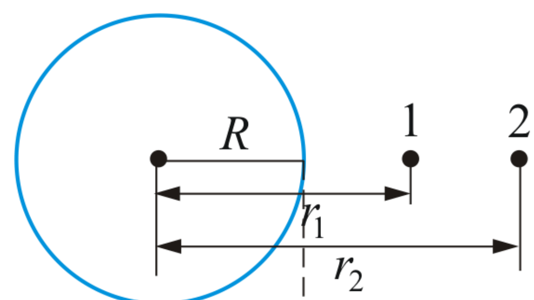
$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

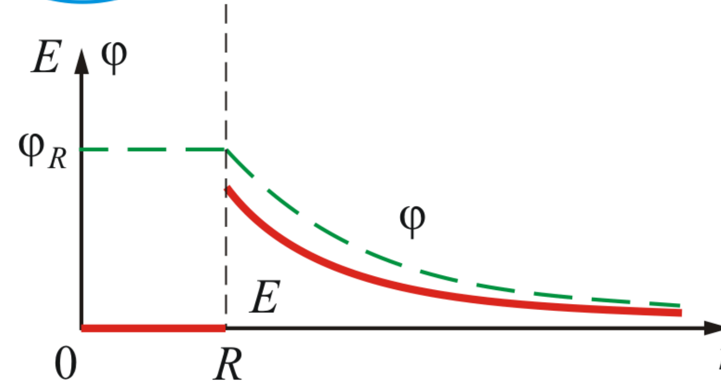
$$d\varphi = -E dr \qquad \int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 l}\left(\ln r_2 - \ln r_1\right)$$



$$\varphi = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{1}{R} = const - \textit{внутри и} \\ \qquad\qquad \textit{на поверхности цилиндра} \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r}{R} \quad - \textit{вне цилиндра.} \end{cases}$$



Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

Самостоятельно!

3. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

4. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей

5. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора

6. Поле объемно заряженного шара