Принцип суперпозиции напряженности электрического поля

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

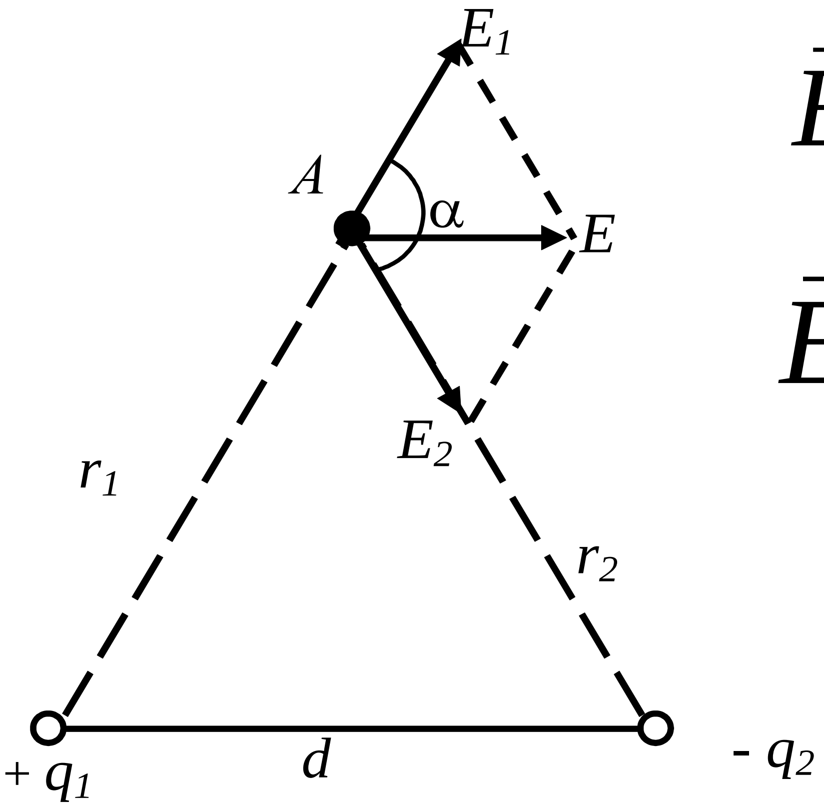
принцип суперпозиции или независимости действия сил

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_n$$

Напряженность **результирующего поля, системы точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, созданных в данной точке каждым из них в отдельности.**

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле 2х точечных зарядов.



$\vec{E}_1$ – напряженность поля, создаваемая зарядом q_1, когда заряд q_2 отсутствует.

$\vec{E}_2$ – напряженность поля, создаваемая зарядом q_2, когда заряд q_1 отсутствует.

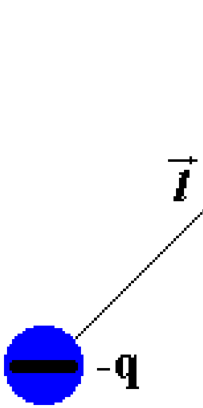
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1 r_2}.$$

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле диполя.



***Электрическим диполем** называется система двух одинаковых по величине, но разноименных точечных зарядов, расстояние между которыми* $\boldsymbol{l}$ *значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле системы* $r \gg l$

$\vec{l}$ – ***плечо диполя** – вектор, направленный от отрицательного заряда к положительному и численно равный расстоянию между зарядами.*

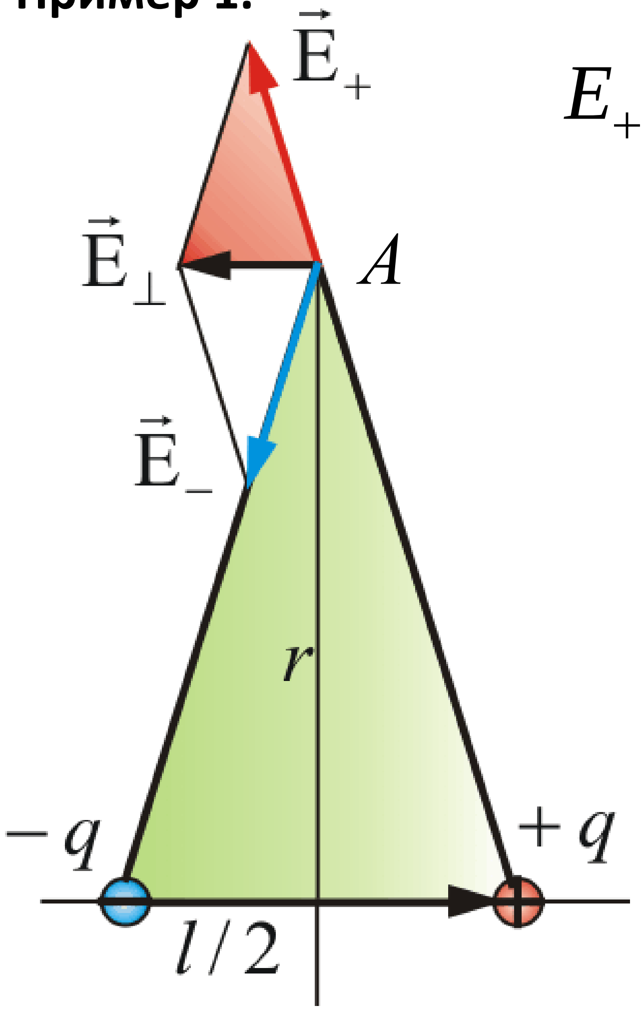
$$\boxed{\vec{\mathrm{P}} = q\vec{l}}$$

электрический момент диполя
(или ***дипольный момент***) *– произведение положительного заряда диполя на плечо*

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле диполя.

Пример 1.



$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

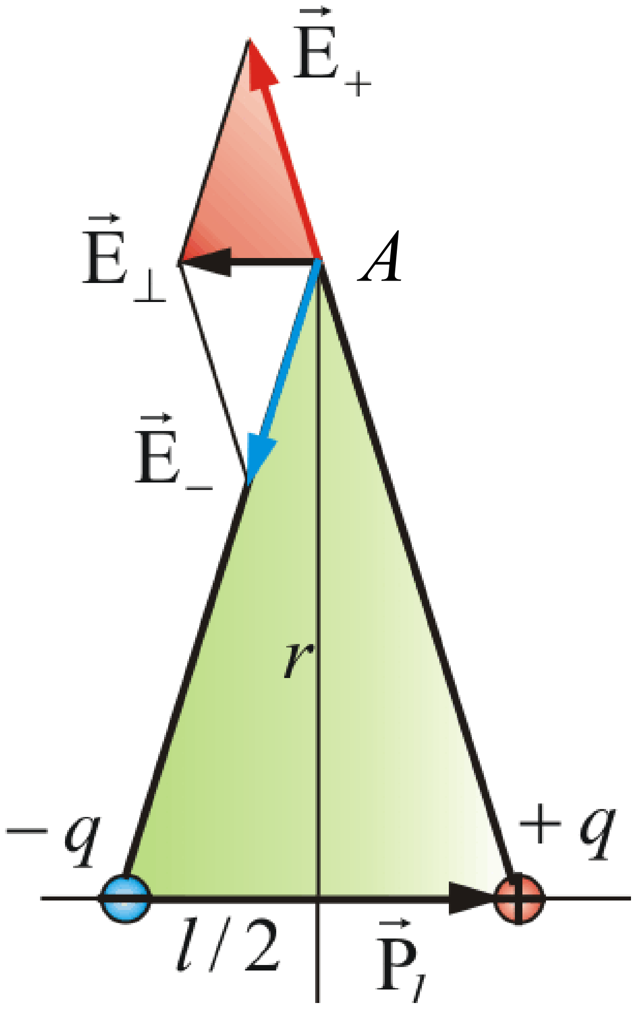
$$r >> l$$

$$\frac{E_\perp}{E_+} = \frac{l}{\left(r^2+\frac{l^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \approx \frac{l}{r}$$

$$E_\perp = E_+\frac{l}{r} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле диполя.



$$E_\perp = E_+ \frac{l}{r} = \frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.$$

$$\vec{P} = q\vec{l}$$

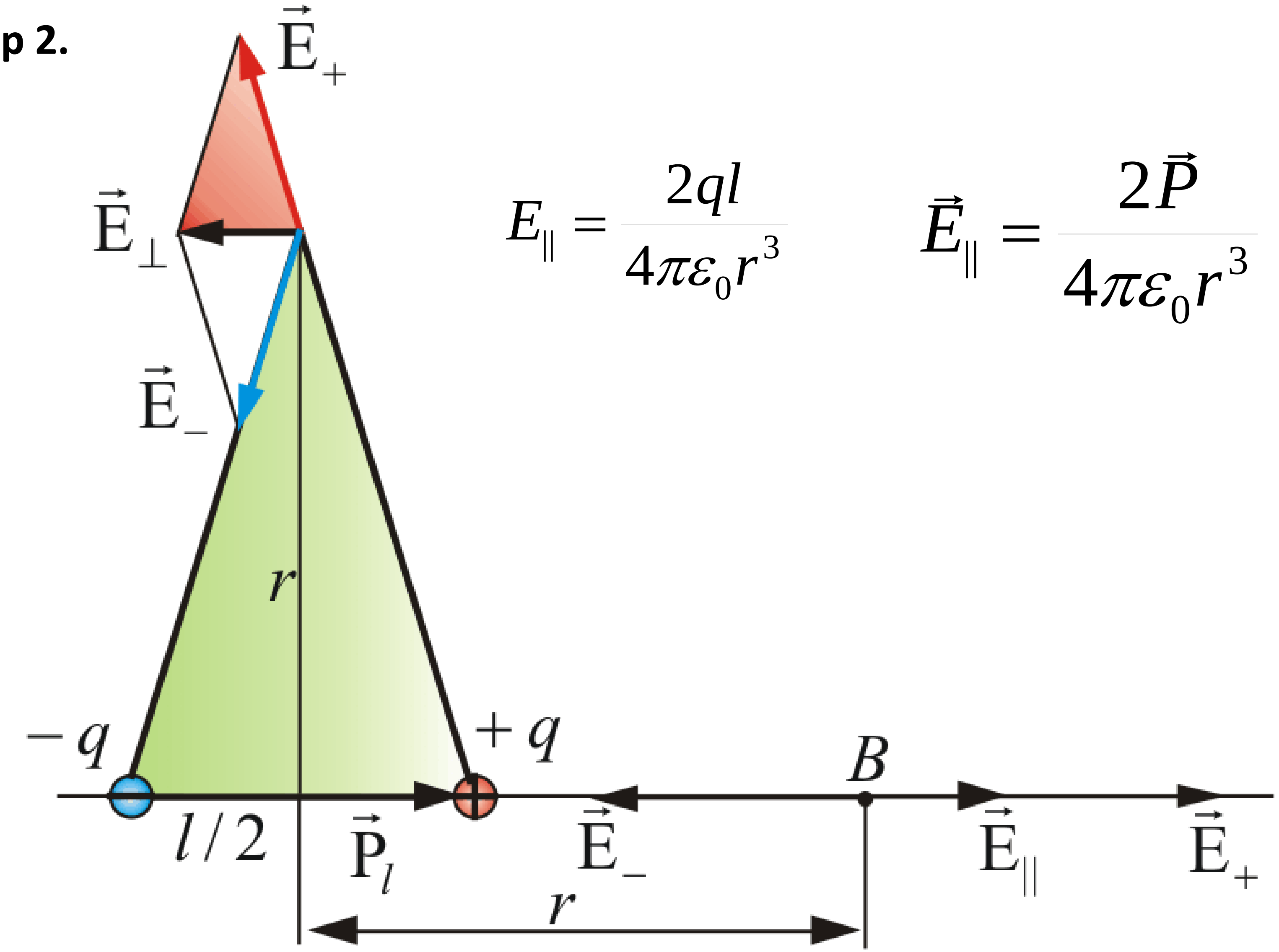
$$E_\perp = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_\perp = \frac{-\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле диполя.

Пример 2.



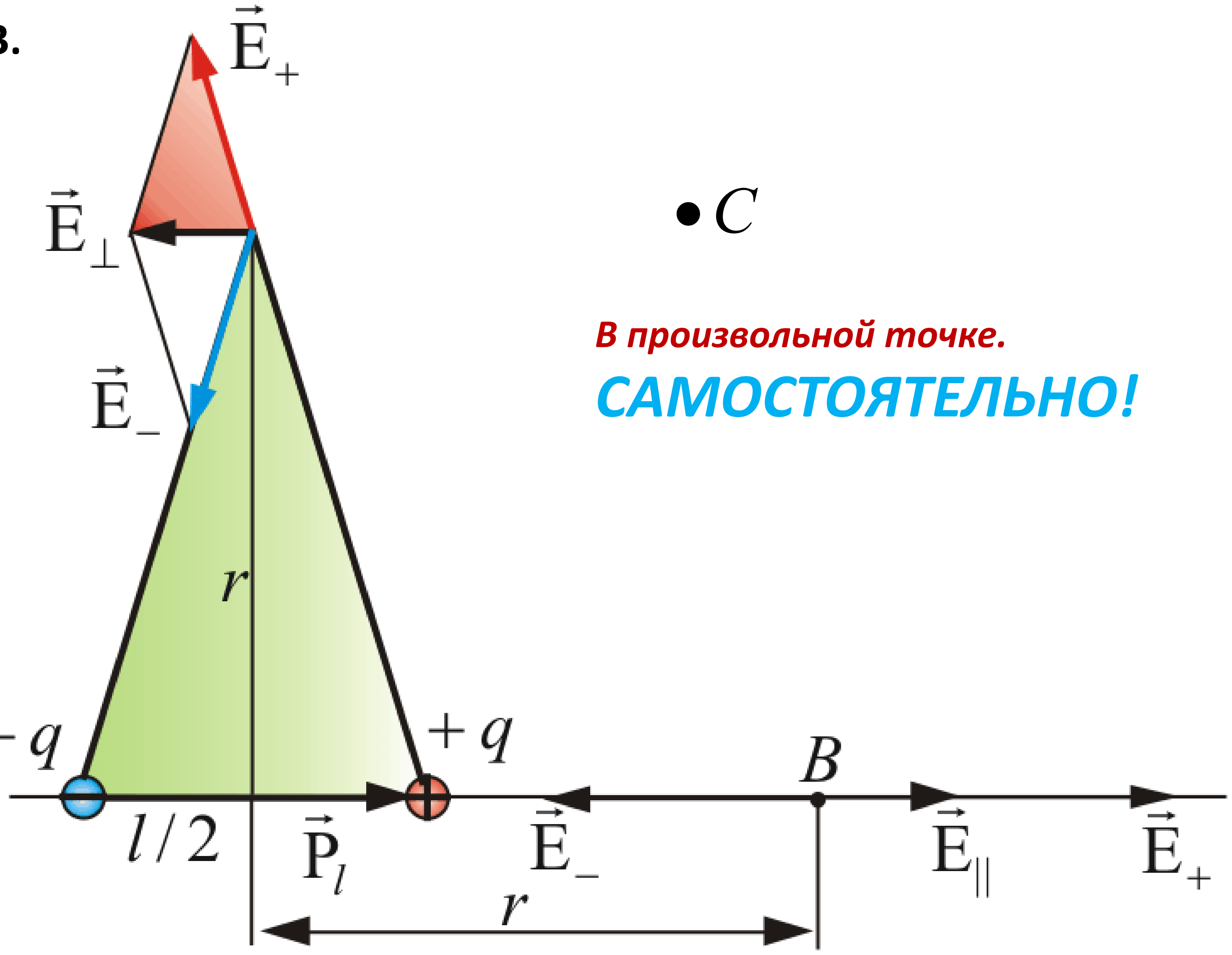
$$E_{||} = \frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_{||} = \frac{2\vec{P}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле диполя.

Пример 3.



• C

В произвольной точке.

САМОСТОЯТЕЛЬНО!

Применение принципа суперпозиции к расчету полей

Поле распределенного заряда.

Тело разбивается на бесконечно малые элементы и определяется напряженность поля создаваемого каждым элементом, затем интегрируется по всему телу:

$$\boxed{\vec{E} = \int d\vec{E},}$$

$\lambda = dq / dl$ – линейная плотность заряда, измеряется в Кл/м;

$\sigma = dq / dS$ – поверхностная плотность заряда, измеряется в Кл/м^2;

$\rho = dq / dV$ – объемная плотность заряда, измеряется в Кл/м^3.

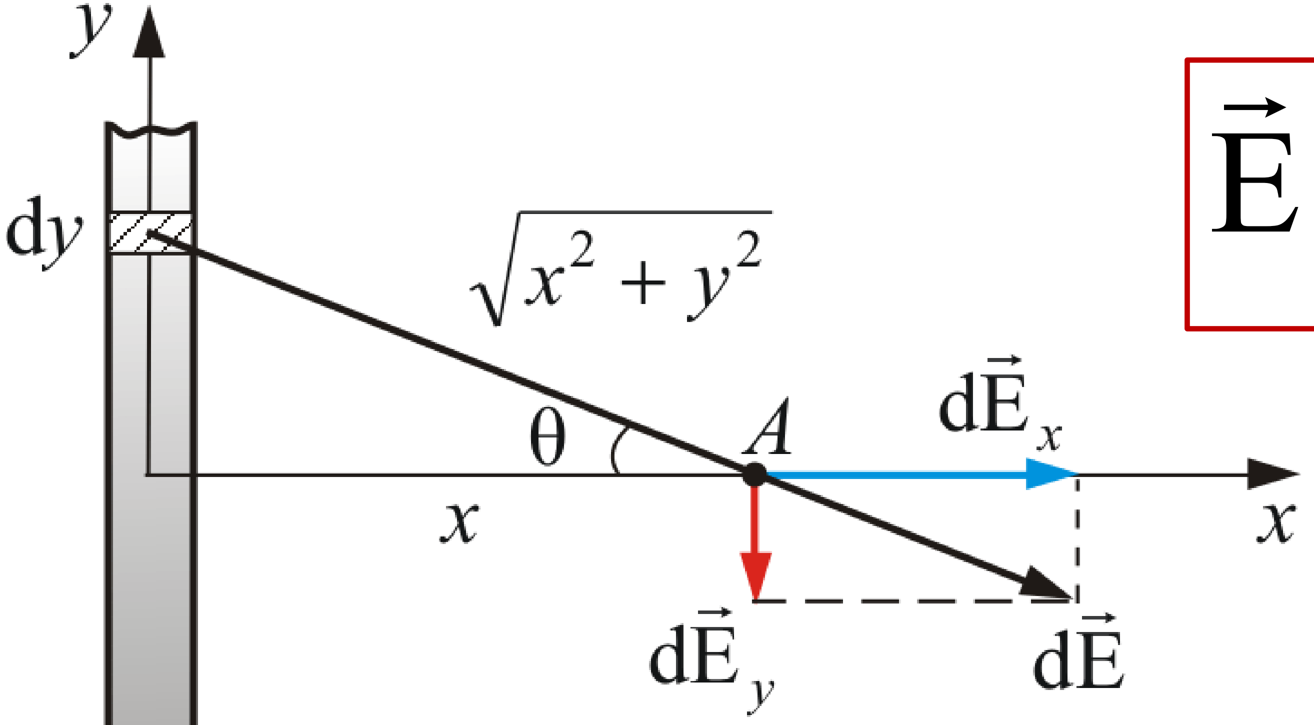
Линейная, поверхностная и объемная плотности зарядов

$$dq = \tau \cdot dl \qquad dE = k\frac{\tau \cdot dl}{r^2} \qquad E = \int_l k\frac{\tau \cdot dl}{r^2}$$

$$dq = \sigma \cdot dS \qquad dE = k\frac{\sigma \cdot dS}{r^2} \qquad E = \int_S k\frac{\sigma \cdot dS}{r^2}$$

$$dq = \rho \cdot dV \qquad dE = k\frac{\rho \cdot dV}{r^2} \qquad E = \int_V k\frac{\rho \cdot dV}{r^2}$$

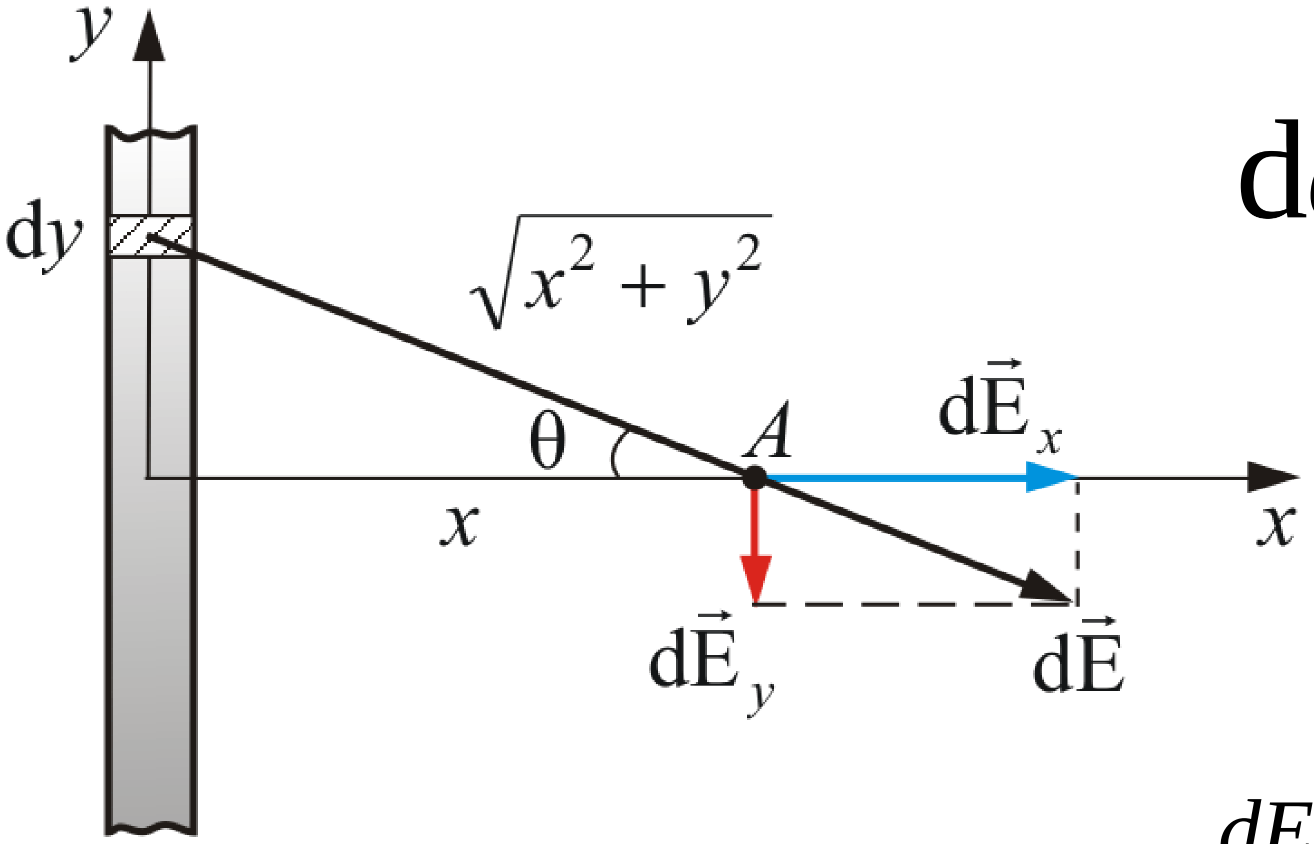
Применение принципа суперпозиции к расчету полей



$$\boxed{\vec{E} = \int d\vec{E},}$$

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

Применение принципа суперпозиции к расчету полей



$$dq = \lambda dy.$$

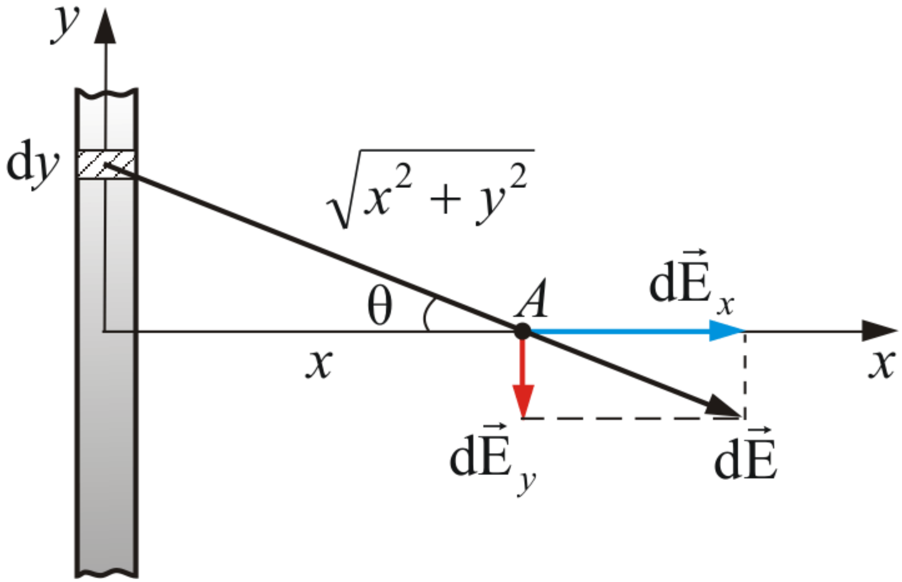
$$dE_x = dE\cos\theta$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dy}{(x^2 + y^2)}$$

$$dE_y = dE\sin\theta$$

$$E_y = \int dE\sin\theta = 0$$

Применение принципа суперпозиции к расчету полей



$$y = x\,tg\,\theta$$

$$dy = x d\theta / \cos^2\theta$$

$$(x^2 + y^2) = x^2 / \cos^2\theta$$

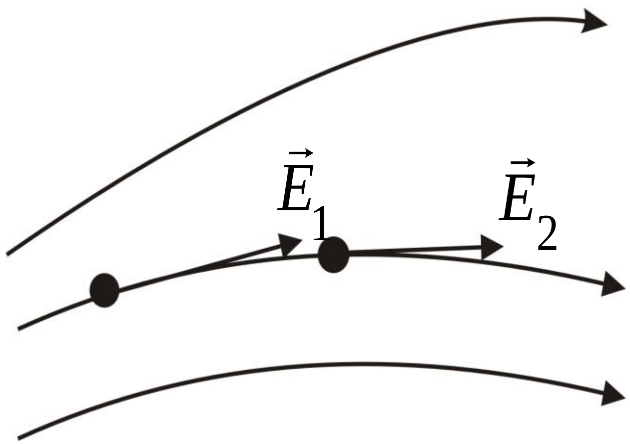
$$E = E_x = \int dE\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\cos\theta dy}{x^2 + y^2}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}}$$

ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Силовые линии напряженности электрического поля

Силовые линии напряженности электрического поля - линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором ***E***

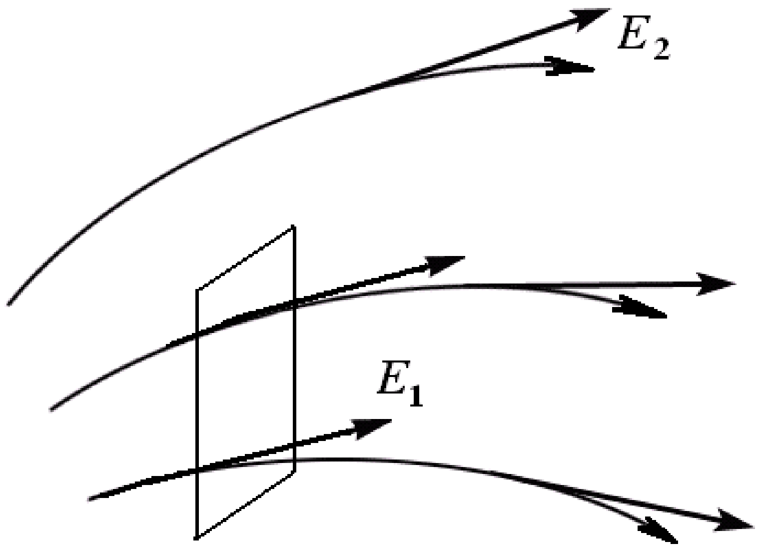


Линии напряженности начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном.

Силовые линии напряженности электрического поля

Густота линий

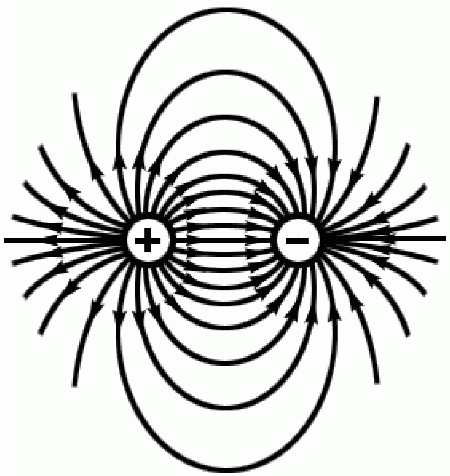
количество линий, пронизывающих единичную площадку поверхности, перпендикулярную к ним численно равно модулю вектора ***E***.

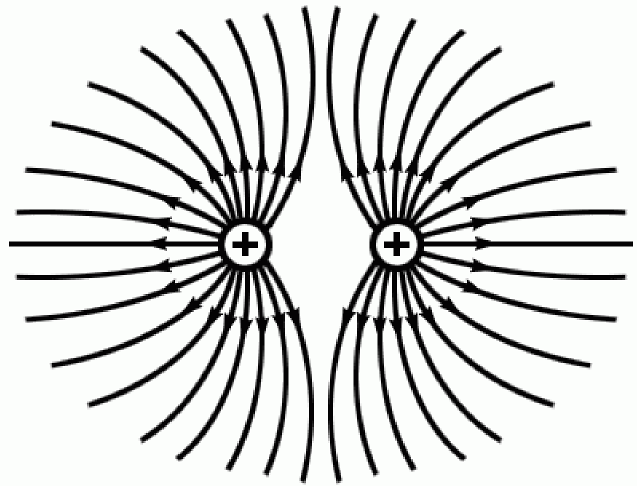


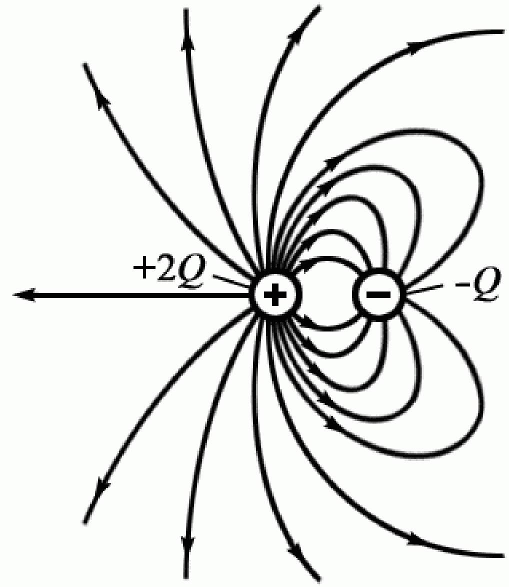
$$\left|\vec{\mathrm{E}}\right| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

Силовые линии напряженности электрического поля

Диаграммы силовых линий







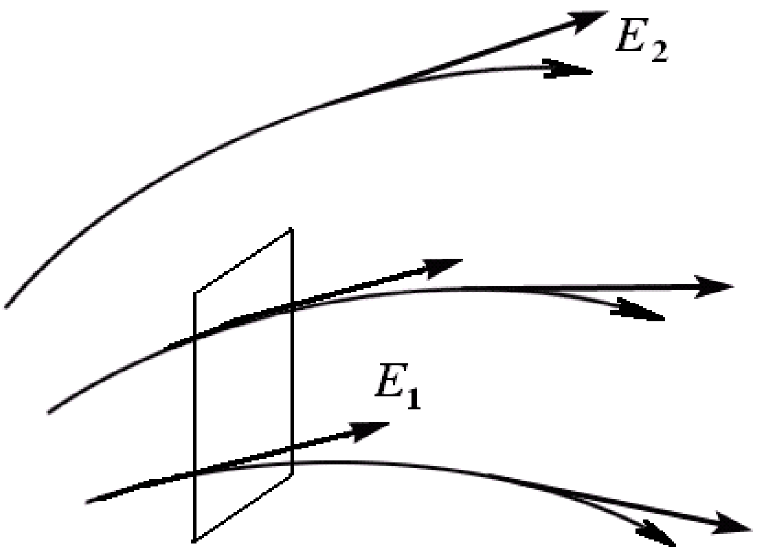
два заряда противоположного знака (диполь);

два заряда одного знака

два заряда,
$-Q$ и $+2Q$

Силовые линии напряженности электрического поля

Пример 1: $S = 2м^2$



$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

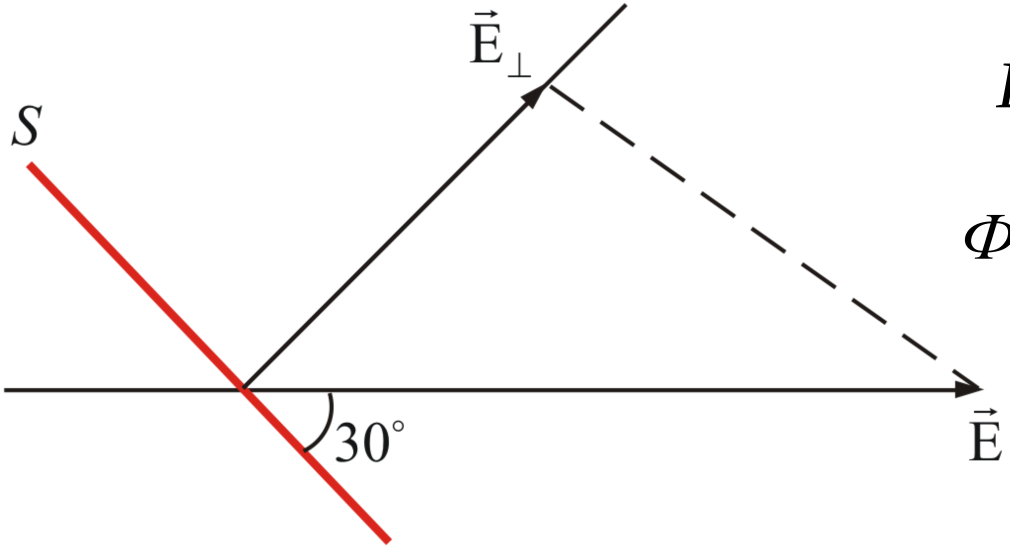
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\Phi}{S} = \frac{2}{2} = 1\frac{В}{м}.$$

Однородным называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению, т.е. $\vec{E} = \mathrm{const}.$

Силовые линии напряженности электрического поля

Пример 2: площадка $S = 3\text{м}^2$ находится в однородном поле $100\ \dfrac{Н}{Кл}$.

Сколько линий пересекает эту площадку, если угол составляет 30^0?



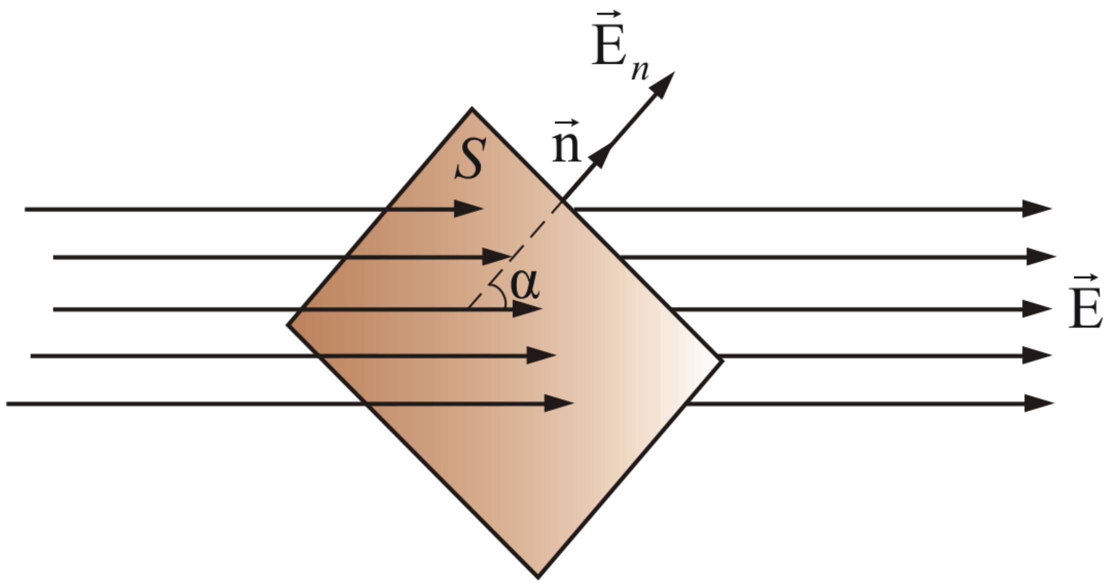
$$E_{\perp} = E\sin 30^{\circ} = 50\ \text{Н/Кл}$$

$$\Phi = E_{\perp}S = 50 \cdot 3 = 150\ \text{линий.}$$

Поток вектора напряженности электрического поля

<u>Полное число силовых линий</u>*, проходящих через поверхность S, называется* ***потоком вектора напряженности*** *Φ_E через эту поверхность.*

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES\cos\alpha = E_n S,$$



$\boldsymbol{E_n}$ – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к данной площадке.

Поток вектора напряженности электрического поля

Элементарный поток вектора напряженности через площадку ***dS*** определится соотношением:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha$$

$$d\mathit{\Phi}_E = (\vec{\mathrm{E}}\, d\,\vec{\mathrm{S}})$$

Поток вектора напряженности электрического поля

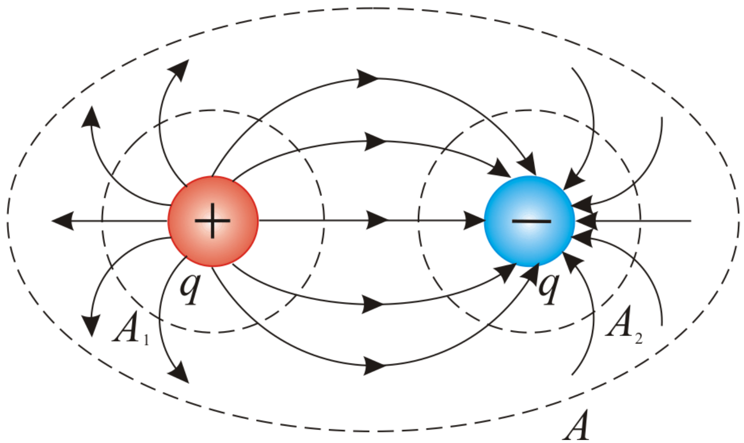
Полный поток вектора напряженности через любую площадку $\boldsymbol{S}$:

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} d\vec{S})$$

Поток через замкнутую поверхность, окружающую заряд или заряженное тело :

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S})$$

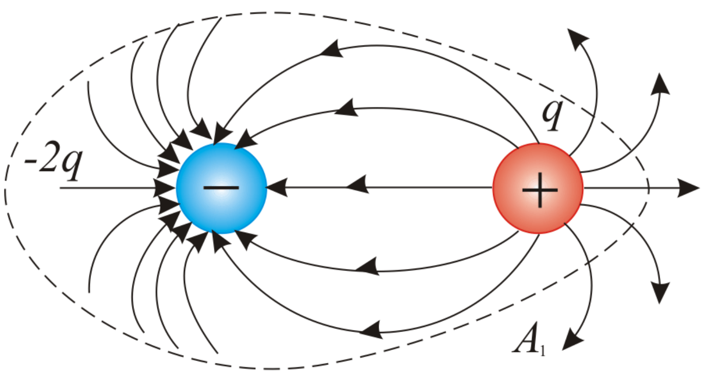
Поток вектора напряженности электрического поля



A_1: $\Phi_E > 0$

A_2: $\Phi_E < 0$

Общий поток через поверхность ***A*** равен нулю.



Поток не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю.

Поток вектора напряженности зависит от заряда.

Теорема Остроградского – Гаусса

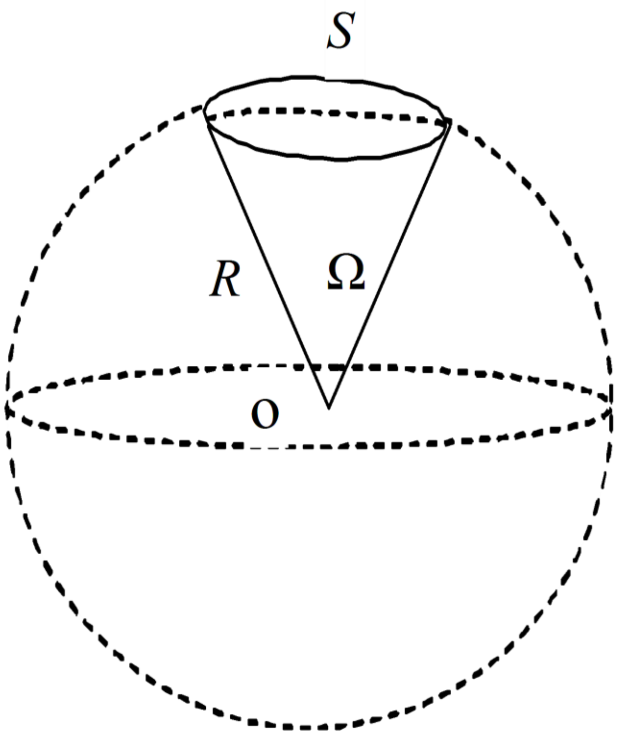
Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0

$$\boxed{\Phi_E = \oint_s (\vec{E}d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i}$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Док-во теоремы:

Телесный угол – часть пространства, ограниченная конической поверхностью.

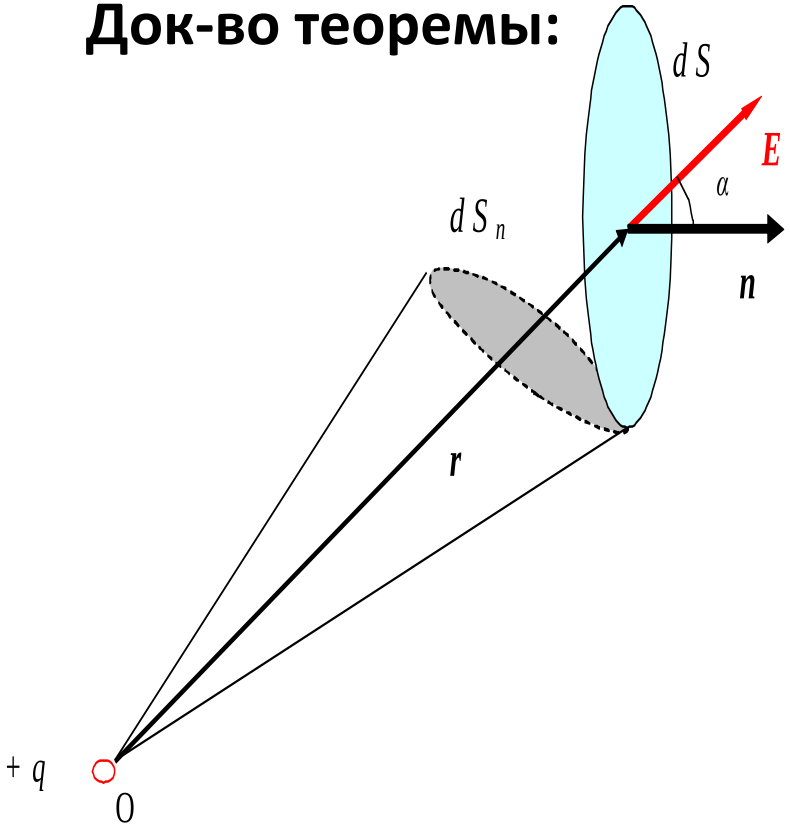


$$\Omega = \frac{S}{R^2} \qquad [\text{стерадиан}]$$

Мера телесного угла – отношение площади *S*, вырезаемой на поверхности сферы конической поверхностью к квадрату радиуса *R* сферы.

Теорема Остроградского – Гаусса

Док-во теоремы:



$$d\Phi_E = E dS \cos\alpha$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

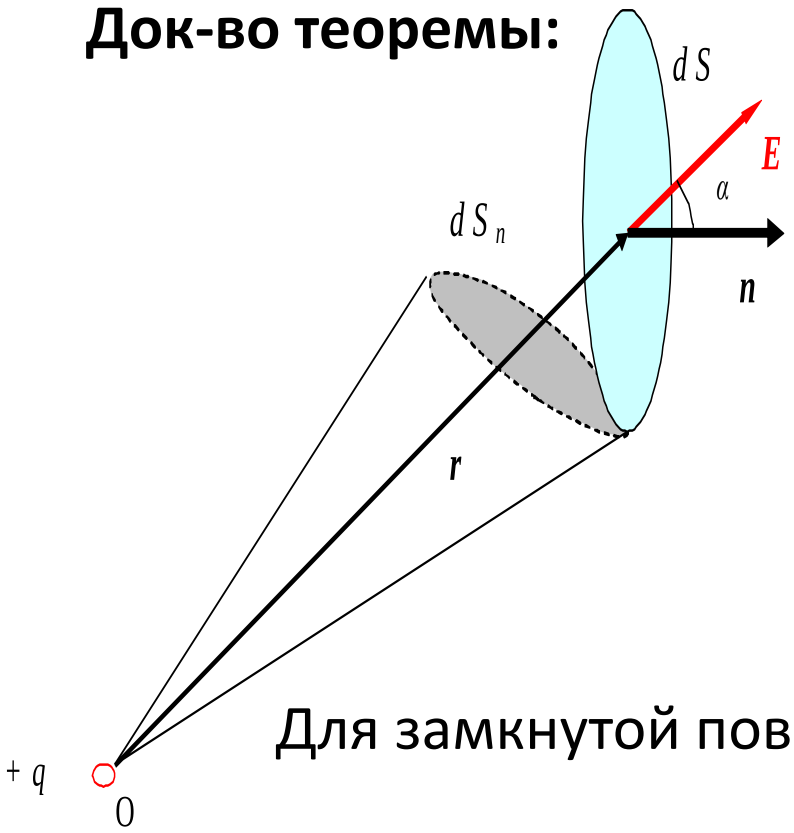
$$d\Phi_E = \frac{q dS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dS_n – проекция площадки dS на плоскость перпендикулярную вектору r .

$$dS \cdot \cos\alpha = dS_n$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Док-во теоремы:



$$dS_n = r^2 \cdot d\Omega$$

$$d\Phi_E = \frac{q\,dS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega$$

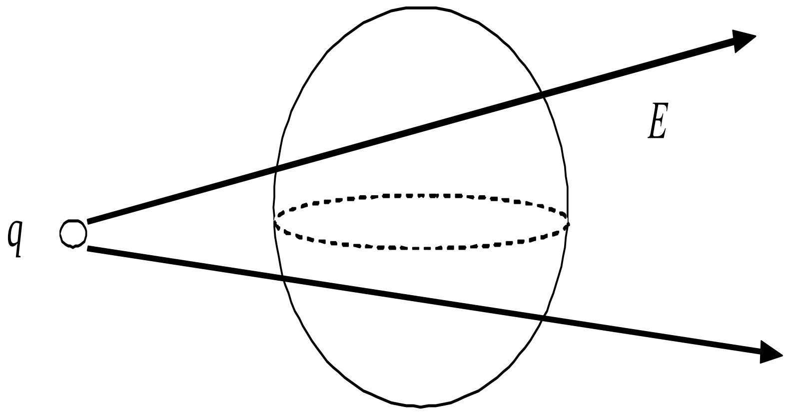
Для замкнутой поверхности:

$$\oint d\Omega = 4\pi$$

$$\boxed{\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Поверхность не охватывает какой-либо заряд, то число силовых линий, входящих в поверхность, равно числу силовых линий выходящих из неё.



Суммарный поток Φ_E этого заряда равен нулю. $\Phi_E = 0.$

Теорема Остроградского – Гаусса

Если произвольная поверхность окружает ***k***– зарядов, то согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k$$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{k} E_{ni}\right) \cdot dS = \sum_{i=1}^{k} \oint_S E_{ni} dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

Теорема доказана!!!!

Теорема Гаусса в интегральной форме

Если внутри поверхности имеется каким-то образом распределенный заряд с объемной плотностью $\boldsymbol{\rho}$

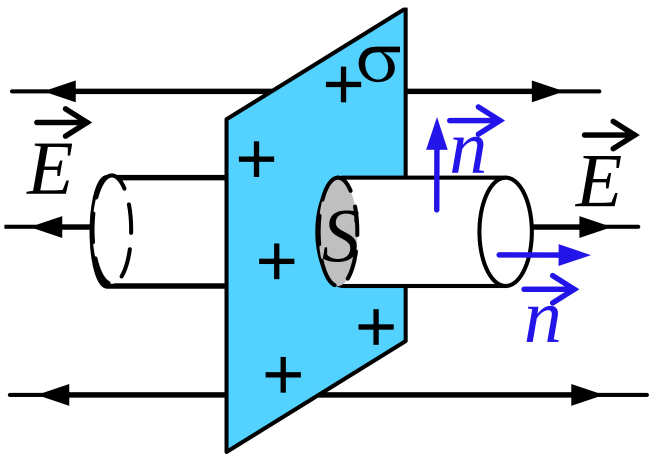
$\boldsymbol{\rho = dq/dV}$, Кл/м^3

то суммарный заряд, заключенный внутри поверхности площадью **S**, охватывающей объем **V**:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV$$

Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

$$\oint_S E_n dS = \int_{S_{бок}} E_n dS_{бок} + 2\int_{S_{осн}} E_n dS_{осн} =$$

$$\int EdS_{бок}\cos 90^0 + 2\int EdS_{осн}\cos 0^0 = 2ES_{осн}$$

Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

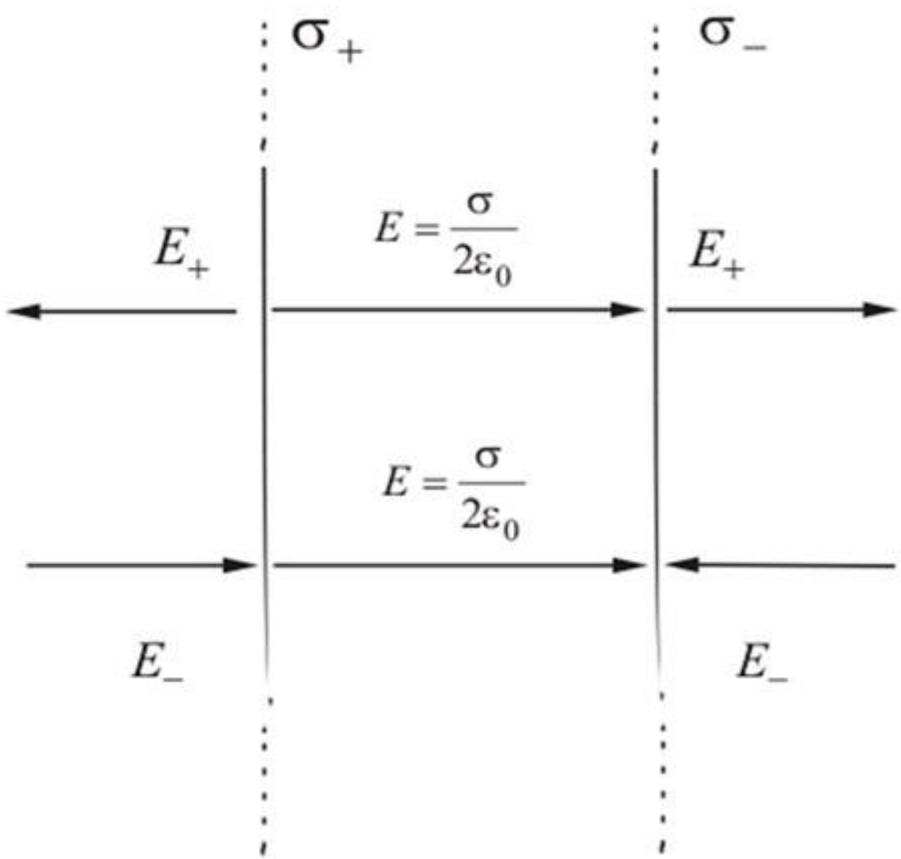
$$dq = \sigma dS, \quad \sum_{i=1}^{N} q_i = \int \sigma dS = \sigma S_{осн}.$$

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

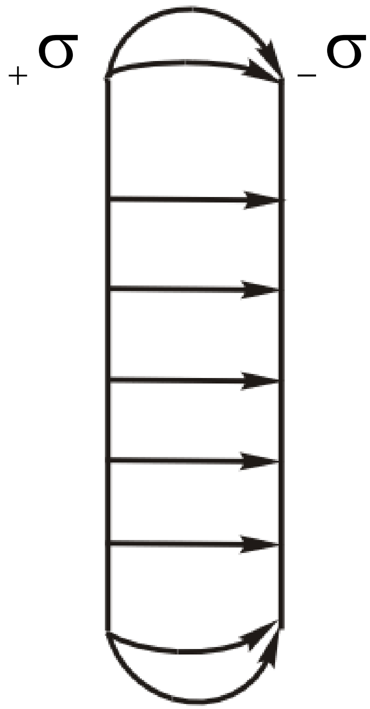
2. <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

2. <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>

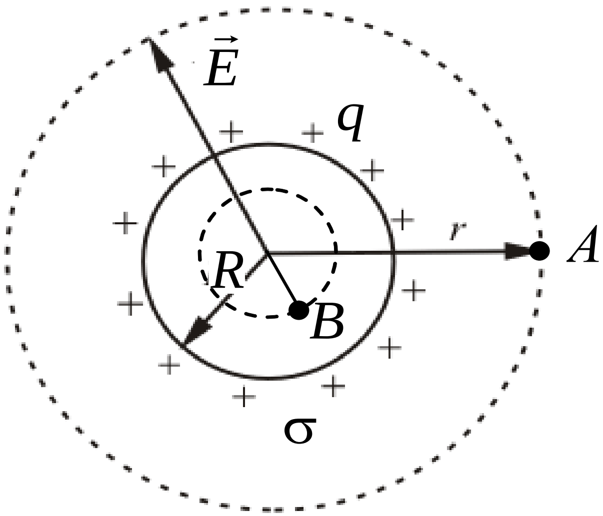


$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

3. Поле, образованное заряженной сферической поверхностью

В точке A $(r>R)$: $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$



$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

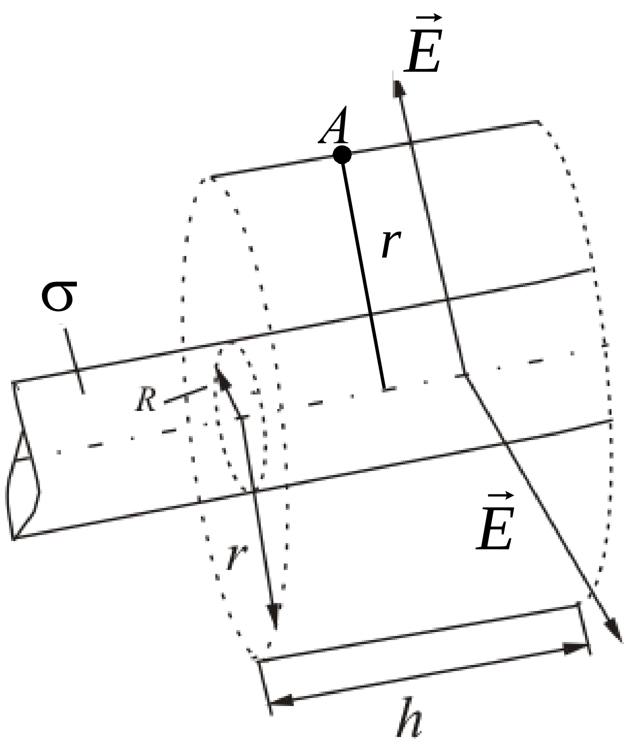
$$q = \sigma 4\pi R^2$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$$

В точке B напряженность будет равна нулю $(r<R)$.

Применение теоремы Гаусса

4. Поле, образованное бесконечно длинным заряженным цилиндром



В точке A $(r > R)$: $E(r)2\pi rh = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$

$$q = \sigma 2\pi Rh$$

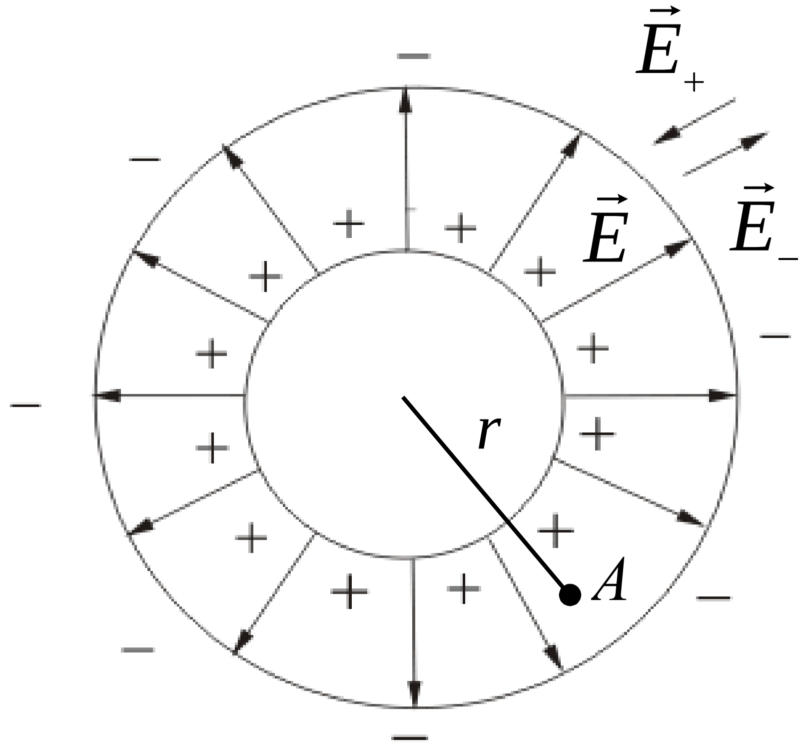
$$\boxed{E = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}}$$

Если $(r < R)$: $q = 0$

$$\boxed{E = 0}$$

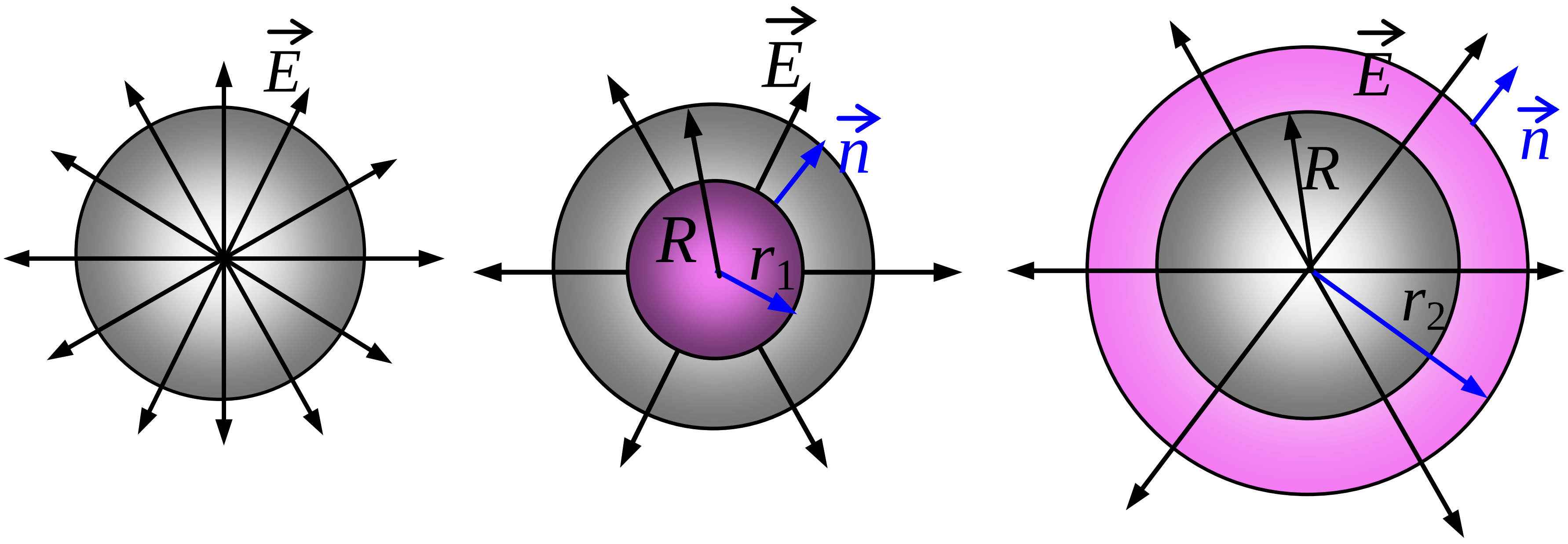
Применение теоремы Гаусса

5. Поле, образованное двумя цилиндрическими поверхностями, заряженными одинаковыми разноименными зарядами



Применение теоремы Гаусса

6. Поле объемного заряженного шара



Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Дивергенция

Дивергенцией вектора $\vec{A}$ (обозначается $div\vec{A}$) в какой-либо точке поля M называется, предел отношения потока вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую точку M , к объему ΔV части поля, ограниченной поверхностью S, при неограниченном уменьшении ΔV:

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{A} d\vec{S} \right)$$

Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $\langle \rho \rangle$. Тогда по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \text{или} \quad \oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{\langle \rho \rangle \Delta V}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = \frac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0}$$

При $\Delta V \to 0;$ $\quad \dfrac{\langle \rho \rangle}{\varepsilon_0} \to \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, а величина потока вектора напряженности

$$div\vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{E} d\vec{S}\right)$$

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Дивергенция

Дивергенция является скалярной функцией координат.

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Или через оператор Набла:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.}$$

В тех точках поля, где $div\vec{E} > 0$ - положительные заряды (истоки)

$div\vec{E} < 0$ - отрицательные заряды (стоки).