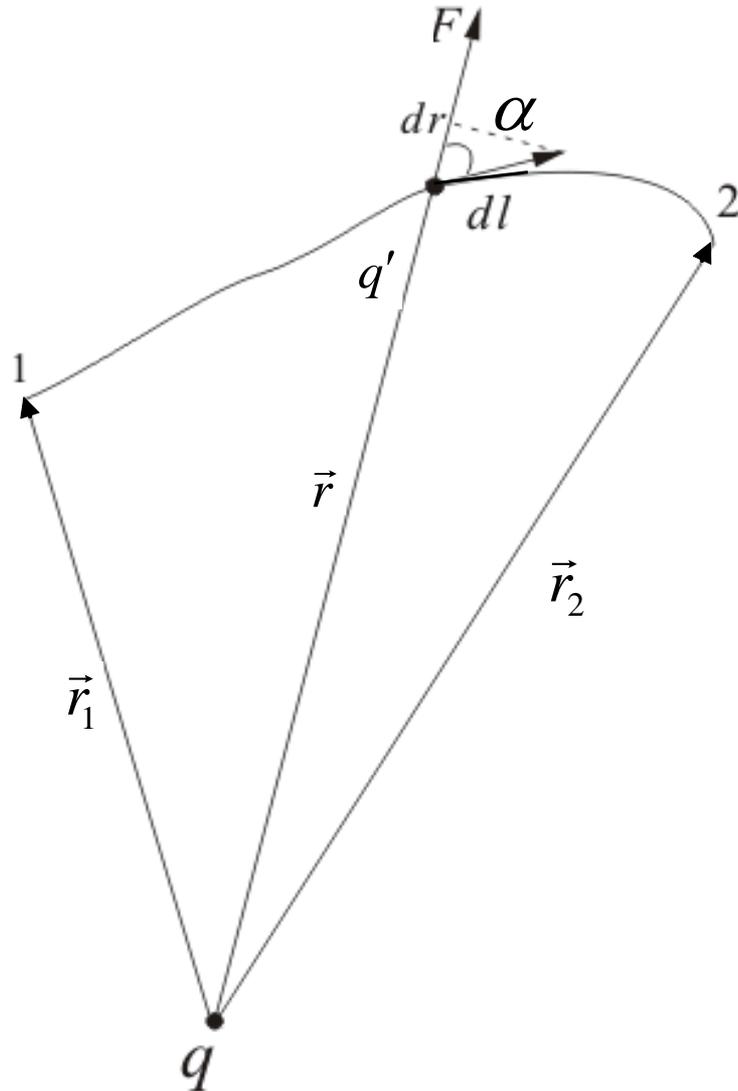


# **ПОТЕНЦИАЛ И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ**

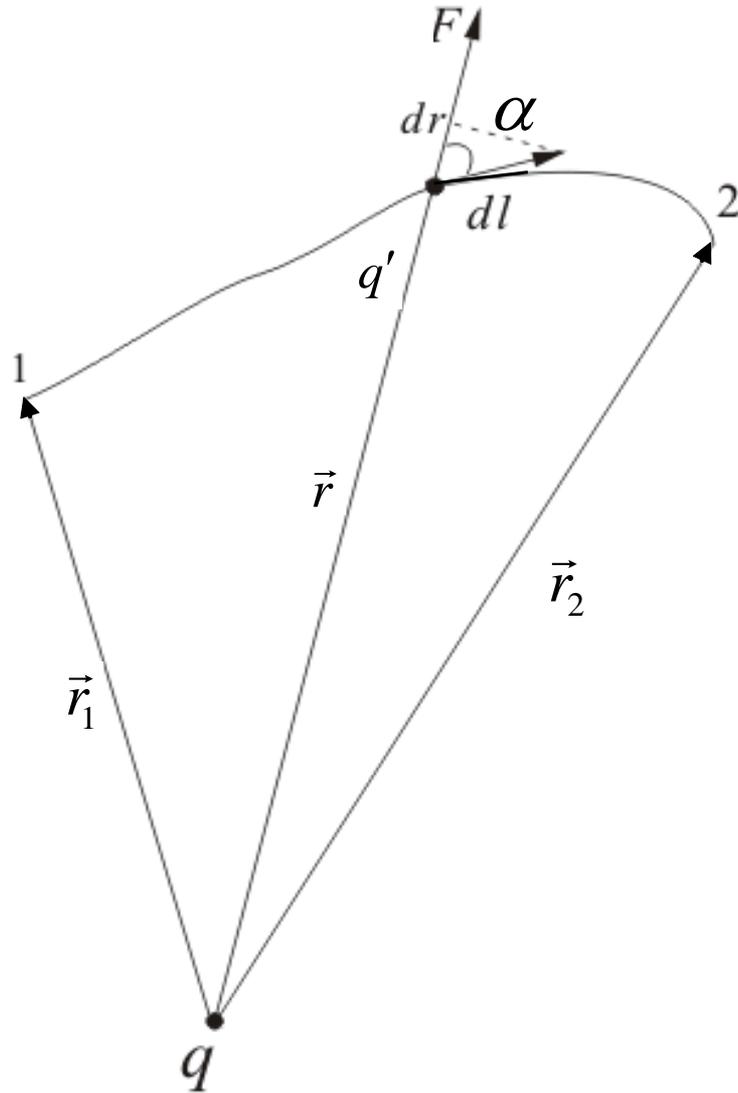
# Работа сил электростатического поля



- Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным зарядом  $q$  .
- В любой точке этого поля на пробный точечный заряд  $q'$  действует сила  $F$  .

$$dA = (\vec{F} d\vec{l})$$

## Работа сил электростатического поля

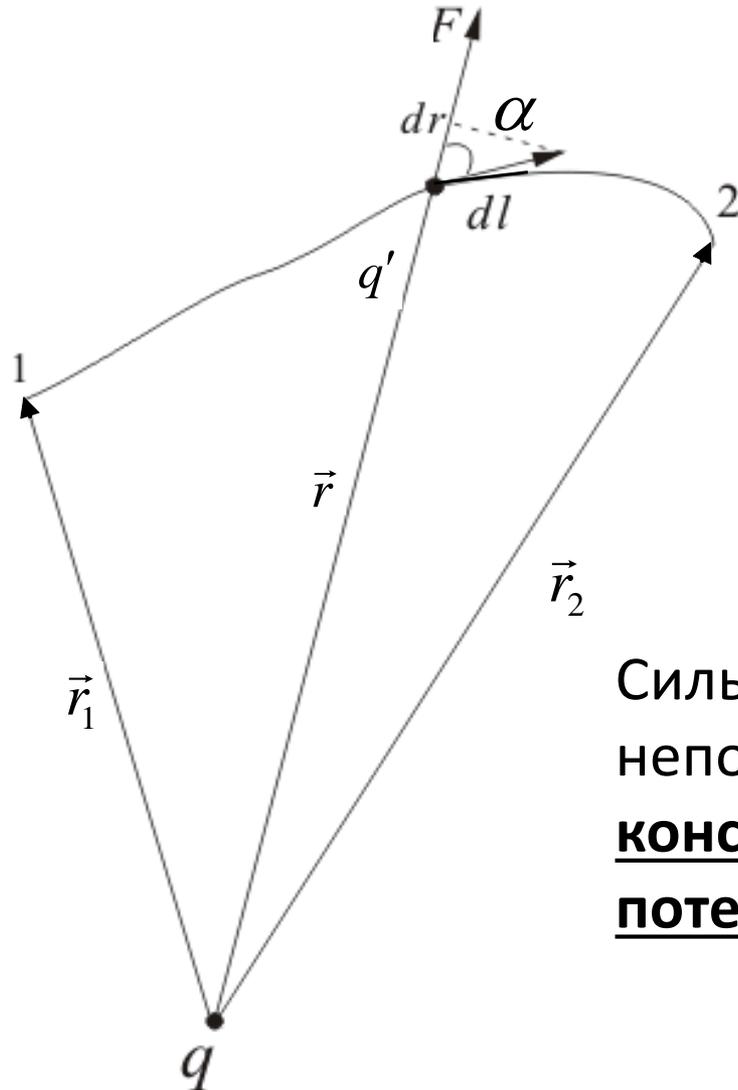


$$dA = F dl \cos \alpha$$
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dl \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} dr$$

$$dl \cos \alpha = dr$$

# Работа сил электростатического поля



$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$$
$$= \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Силы, действующие на заряд  $q'$  в поле неподвижного заряда  $q$ , являются **консервативными**, а поле этих сил **потенциальным**.

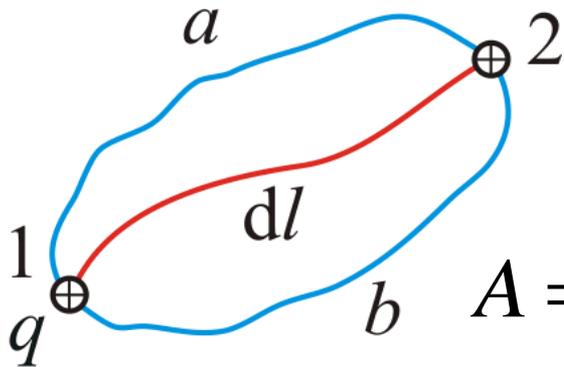
## Работа сил электростатического поля

$$A = \oint q' E_l dl = 0$$

$$\oint E_l dl = 0$$

Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля

$$\int_{1a}^2 (\vec{E} d\vec{l}) = \int_{2b}^1 (\vec{E} d\vec{l})$$



$$A = q \oint (\vec{E} d\vec{l}) = q \int_1^2 (\vec{E} d\vec{l}) - q \int_2^1 (\vec{E} d\vec{l}) = 0.$$

# Работа сил электростатического поля

## Теорема о циркуляции вектора напряженности электростатического поля. Выводы:

- Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми:

$$\oint E_l dl = 0$$

- Электростатическое поле не вихревое.

*есть следствие потенциального характера электростатического поля.*

Теорема Стокса.

САМОСТОЯТЕЛЬНО!!!

# Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

Тело, находящееся в поле потенциальных сил, обладает потенциальной энергией, за счет которой совершается работа силами поля.

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r_2} = W_{P_1} - W_{P_2}$$

$$F = -\frac{dW_P}{dr} \quad \rightarrow \quad dW_P = -Fdr$$

$$W_P = -\int \frac{qq'dr}{4\pi\epsilon_0 r^2} + const = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r} + const$$

## Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$W_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r}$$

Потенциальная энергия

$$\varphi = \frac{W_P}{q_{пр}}$$

Потенциал

**Потенциал** в точке электростатического поля – физическая величина численно равная потенциальной энергии единичного положительного заряда, помещенного в эту точку. В системе СИ [В = Дж/Кл].

# Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W_P}{q_{пр}}$$

потенциал численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

## Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

Если поле создано системой точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , находящихся на расстояниях соответственно  $r_1, r_2, \dots, r_n$  до точки поля, в которой находится заряд  $q'$ , то работа:

$$A_{12} = \sum A_i$$

$$A_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{q_i q'}{r_{i2}} \right)$$

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i q'}{r_{i1}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i q'}{r_{i2}}$$

## Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2}$$

$$W_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i q'}{r_i}$$

$$\varphi = \frac{W_p}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен **алгебраической сумме потенциалов**, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

## Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$\varphi = \frac{W_p}{q_{np}} \quad \longrightarrow \quad W_p = q\varphi$$

$$A_{12} = W_{p_1} - W_{p_2} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Работа, совершаемая над зарядом силами поля, равна произведению заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

## Потенциальная энергия и потенциал электростатического поля

$$A_{\infty} = q\varphi$$

$$\varphi = \frac{A_{\infty}}{q}$$

Потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки поля в бесконечность

или

работе, которую надо совершить против сил электрического поля для того, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля.

**Связь между напряженностью  
электростатического поля и потенциалом**

$$dA = qE_l dl \quad dA = -q d\varphi$$

$$qE_l dl = -q d\varphi$$

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}$$

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} \quad E_y = -\frac{d\varphi}{dy} \quad E_z = -\frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{E} = \vec{i} E_x + \vec{j} E_y + \vec{k} E_z = -\left( \vec{i} \frac{d\varphi}{dx} + \vec{j} \frac{d\varphi}{dy} + \vec{k} \frac{d\varphi}{dz} \right)$$

## Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$\vec{\text{grad}}\varphi = \vec{i} \frac{d\varphi}{dx} + \vec{j} \frac{d\varphi}{dy} + \vec{k} \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\vec{E} = -\overline{\text{grad}} \varphi$$

связь потенциала с напряженностью

$$\vec{E} = -\nabla \varphi$$

**градиент** – это вектор, показывающий направление наискорейшего изменения (возрастания) некоторой величины

Знак “–” указывает на то, что напряженность направлена в сторону убывания потенциала.

## Связь между напряженностью электростатического поля и потенциалом

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$$

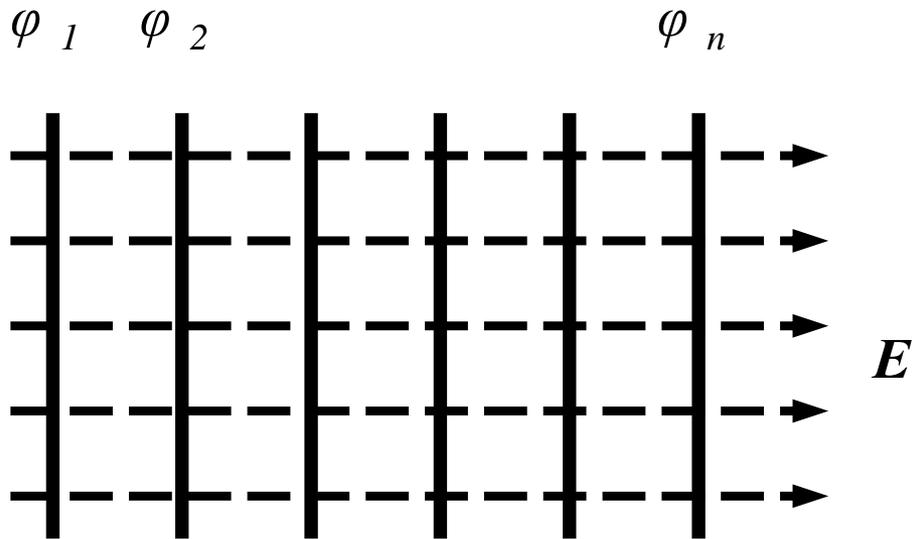
$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}$$

$$\vec{E} = -\overline{grad} \varphi$$

# Эквипотенциальные поверхности

Геометрическое место точек постоянного потенциала называется поверхностью равного потенциала или *эквипотенциальной* поверхностью.

Для однородного поля



# Эквипотенциальные поверхности

Для точечного заряда

$\varphi = const.$

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$A_{12} = q \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l})$$

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l})$$

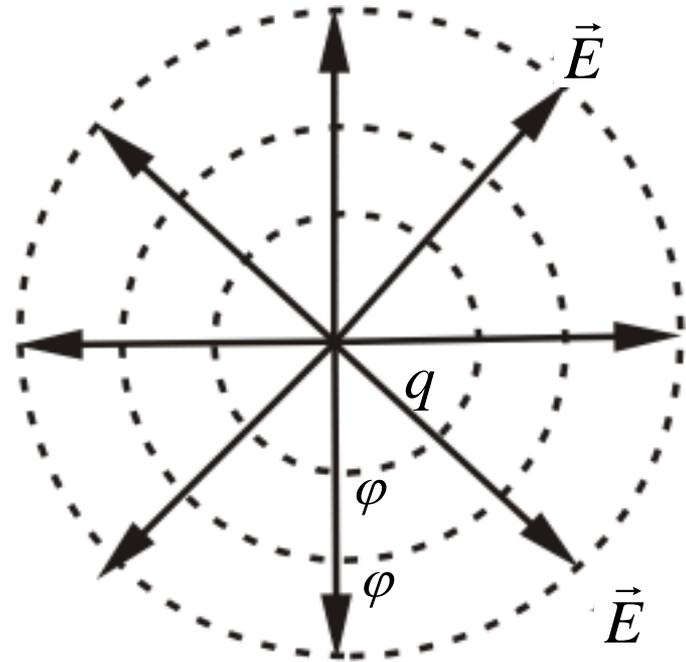
$$\cos \alpha = 0$$



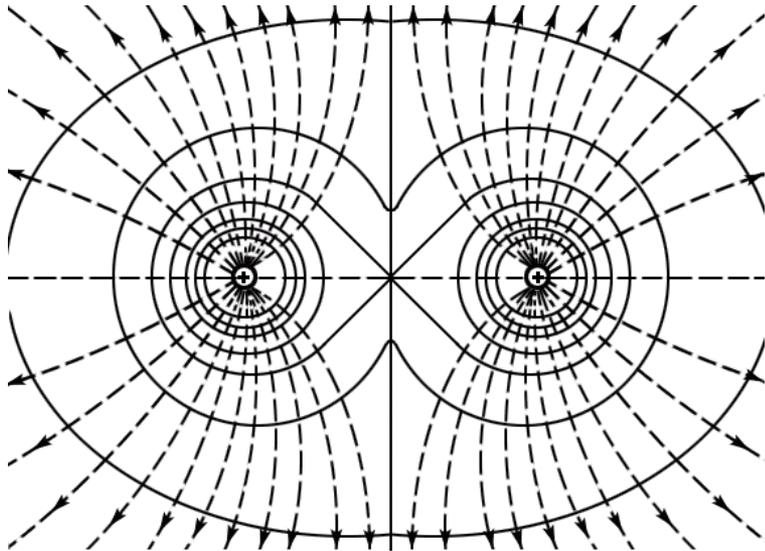
$$\oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$$



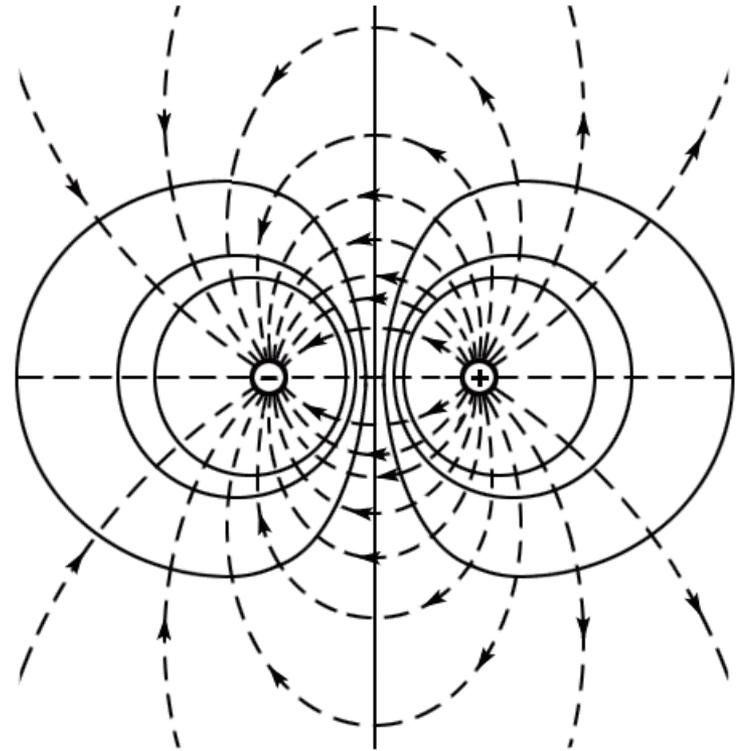
$$\alpha = 90^\circ$$



# Эквипотенциальные поверхности



*a*



*b*

Эквипотенциальные поверхности  
поля двух равных одноименных зарядов (*a*) и диполя (*b*).  
Пунктиром показаны силовые линии.

# Эквипотенциальные поверхности

Прямая задача:  $\vec{E} = -\overline{\text{grad}} \varphi$

Обратная задача:  $d\varphi = -(\vec{E}, d\vec{l})$  или

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) \quad \oint (\vec{E}, d\vec{l}) = 0$$

Уравнение Пуассона:

$$\boxed{\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}, \quad \boxed{\vec{E} = -\overline{\text{grad}} \varphi} \longrightarrow \boxed{\text{div}(\overline{\text{grad}} \varphi) = \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad - \text{ оператор Лапласа.}$$

# Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

## 1. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

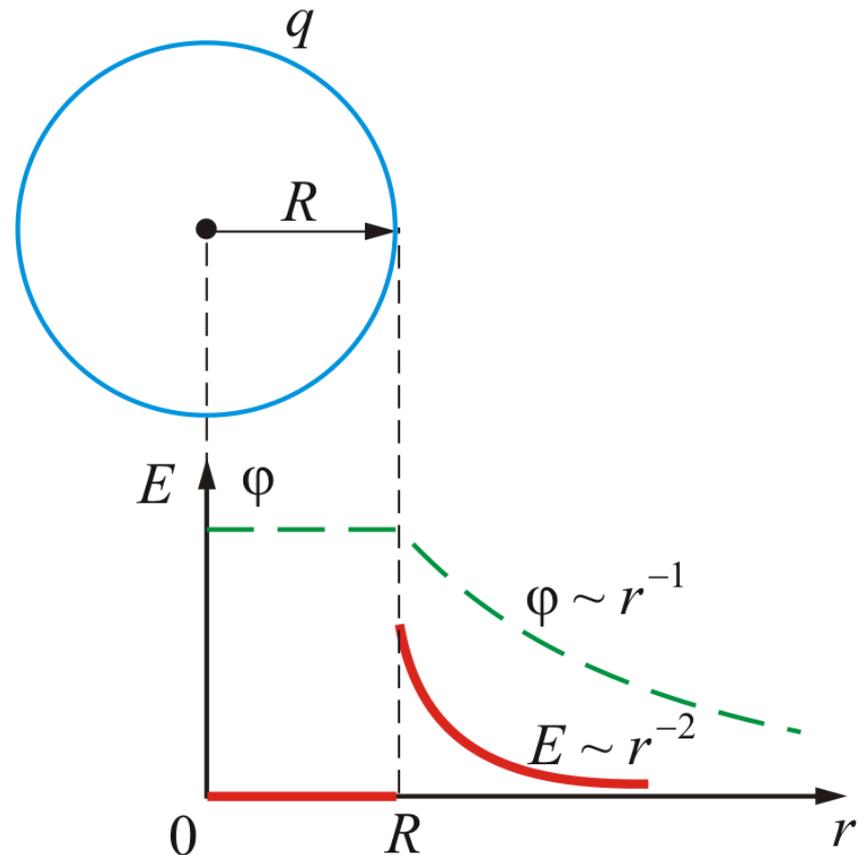
$$\Phi_E = \oint_s E dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$d\varphi = -E dr$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

# Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

$$\varphi = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{— вне сферы } (r > R). \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} = \text{const} & \text{— внутри и на поверхности сферы } (r \leq R) \end{cases}$$



# Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

2. Поле бесконечно длинной равномерно заряженной цилиндрической поверхности:

$$\Phi_E = \oint_s E dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \begin{cases} 0 - \text{внутри цилиндра, т.к. там нет зарядов} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 Rl} \text{ на поверхности цилиндра} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ или } \frac{q}{2\pi\epsilon_0 rl} \text{ вне цилиндра.} \end{cases}$$

$$E = -grad\varphi$$

Цилиндрическая  
система координат

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}$$

## Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей

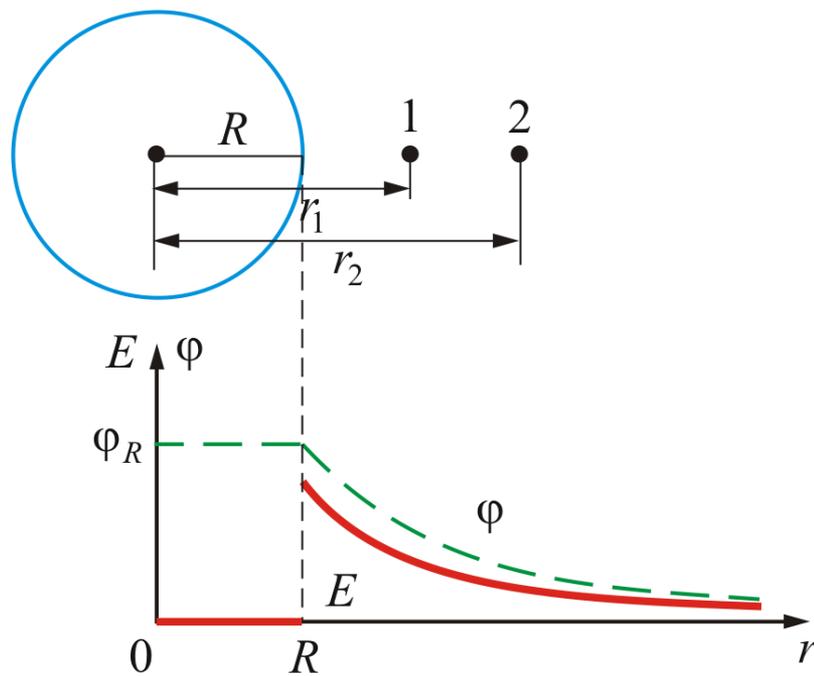
$$d\varphi = -E dr \quad \int_1^2 d\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 l} (\ln r_2 - \ln r_1)$$

$$\varphi = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{R} = \text{const} - \text{внутри и} \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{R} - \text{вне цилиндра.} \end{cases}$$

*на поверхности цилиндра*



# **Вычисление разности потенциалов по напряженности поля простейших электростатических полей**

**Самостоятельно!**

- 3. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости**
- 4. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей**
- 5. Разность потенциалов между обкладками цилиндрического конденсатора**
- 6. Поле объемно заряженного шара**