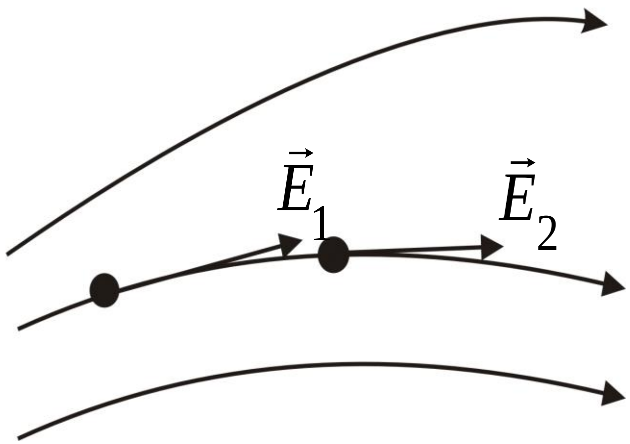
ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО-ГАУССА

Силовые линии напряженности электрического поля

Силовые линии напряженности электрического поля - линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с вектором ***E***

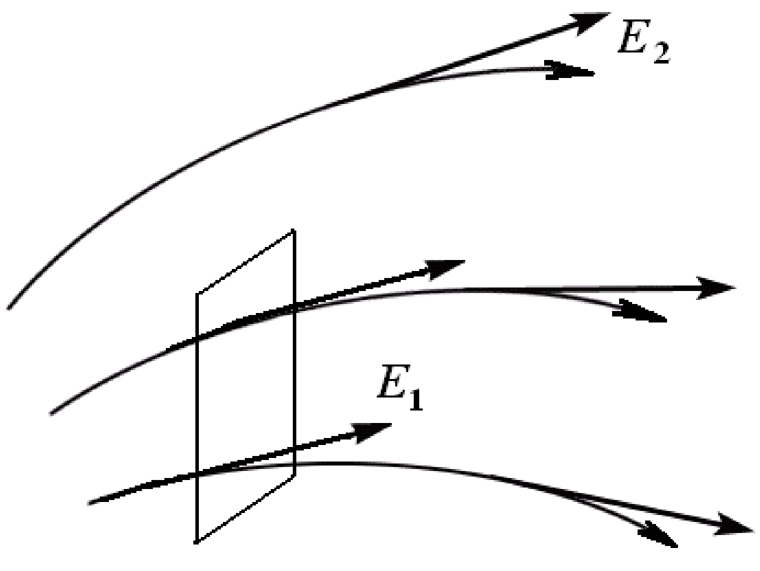


Линии напряженности начинаются на положительном заряде и заканчиваются на отрицательном.

Силовые линии напряженности электрического поля

Густота линий

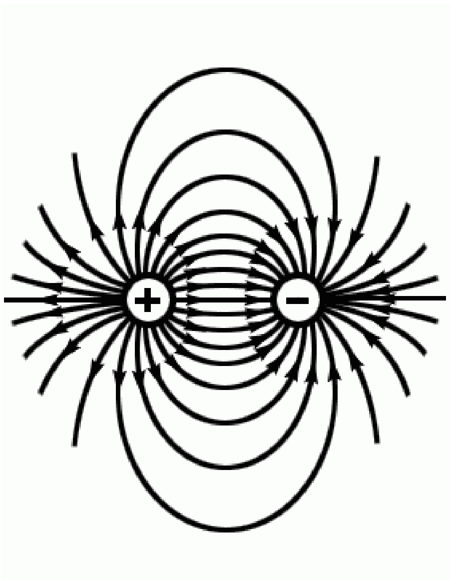
количество линий, пронизывающих единичную площадку поверхности, перпендикулярную к ним численно равно модулю вектора ***E***.



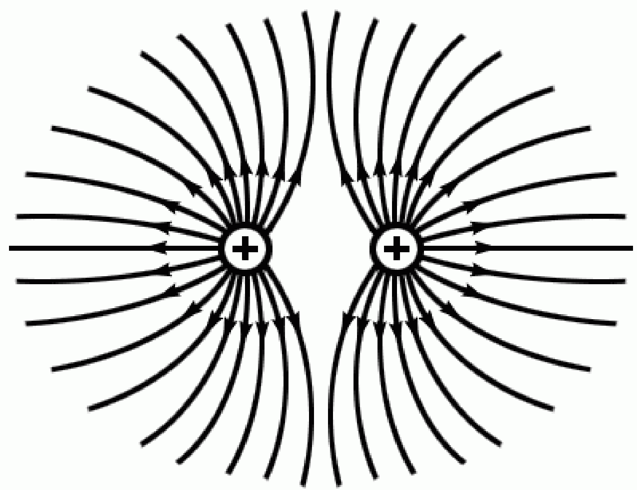
$$\left|\vec{\mathrm{E}}\right| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

Силовые линии напряженности электрического поля

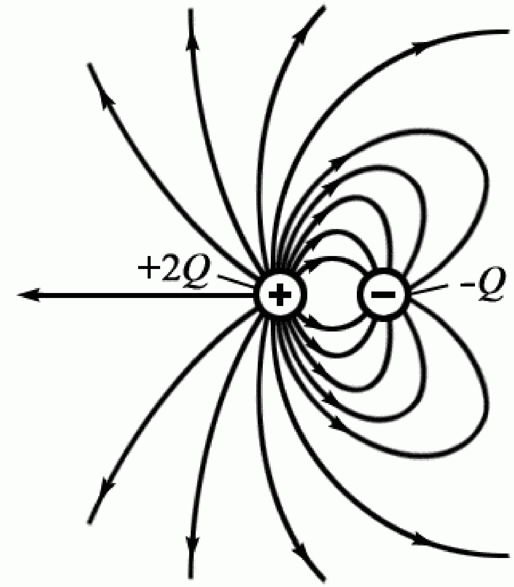
Диаграммы силовых линий



два заряда противоположного знака (диполь);



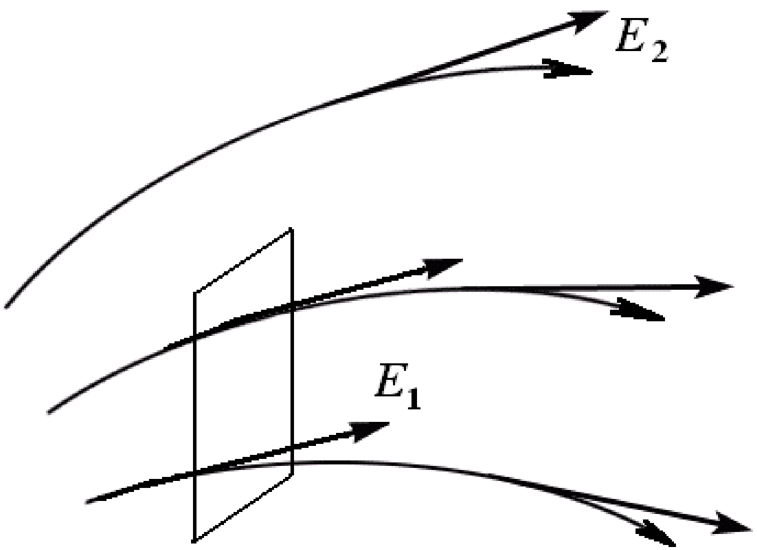
два заряда одного знака



два заряда, $-Q$ и $+2Q$

Силовые линии напряженности электрического поля

Пример 1: $S = 2м^2$



$$\left|\vec{\mathrm{E}}\right| = \frac{\text{число линий}}{S} = \frac{\Phi}{S}.$$

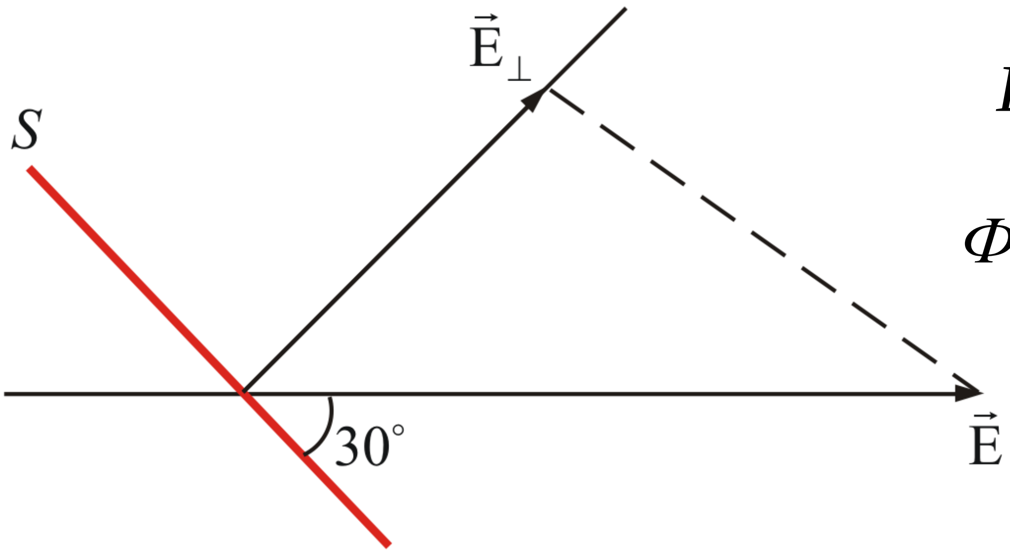
$$\left|\vec{E}\right| = \frac{\Phi}{S} = \frac{2}{2} = 1\frac{В}{м}.$$

Однородным называется электростатическое поле, во всех точках которого напряженность одинакова по величине и направлению, т.е. $\vec{\mathrm{E}} = \mathrm{const}.$

Силовые линии напряженности электрического поля

Пример 2: площадка $S = 3\text{м}^2$ находится в однородном поле $100\ \dfrac{Н}{Кл}$.

Сколько линий пересекает эту площадку, если угол составляет 30^0?



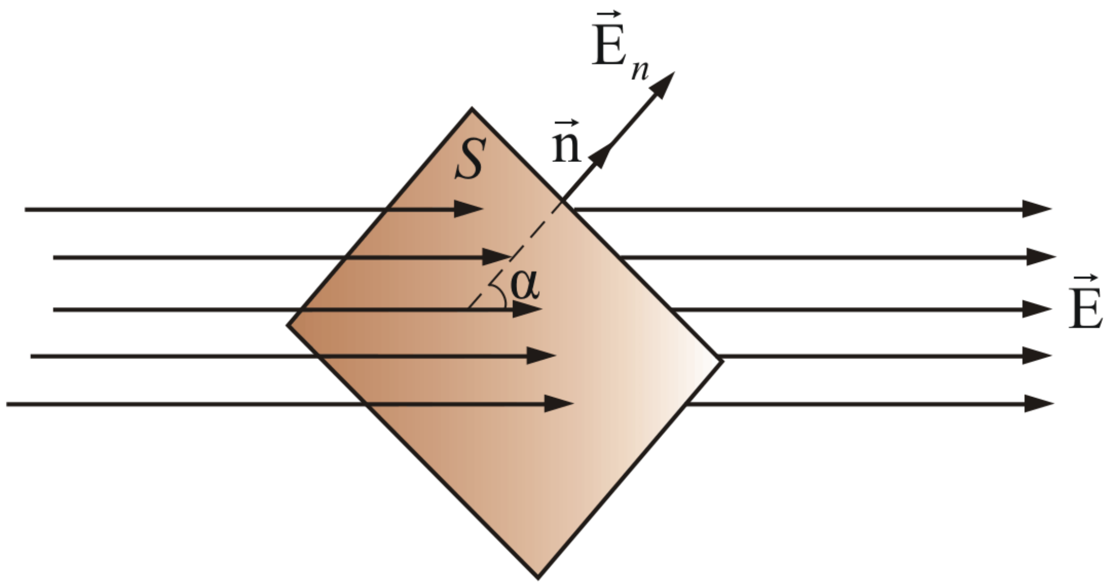
$$E_\perp = E\sin 30^\circ = 50\ \text{Н/Кл}$$

$$\varPhi = E_\perp S = 50 \cdot 3 = 150\ \text{линий.}$$

Поток вектора напряженности электрического поля

<u>Полное число силовых линий</u>*, проходящих через поверхность S, называется* ***потоком вектора напряженности*** Φ_E *через эту поверхность.*

$$\Phi_E = ES_{\perp} = ES\cos\alpha = E_n S,$$



$\boldsymbol{E_n}$ – проекция вектора $\vec{E}$ на нормаль $\vec{n}$ к данной площадке.

Поток вектора напряженности электрического поля

Элементарный поток вектора напряженности через площадку ***dS*** определится соотношением:

$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha$$

$$d\Phi_E = (\vec{\mathrm{E}}\, d\,\vec{\mathrm{S}})$$

Поток вектора напряженности электрического поля

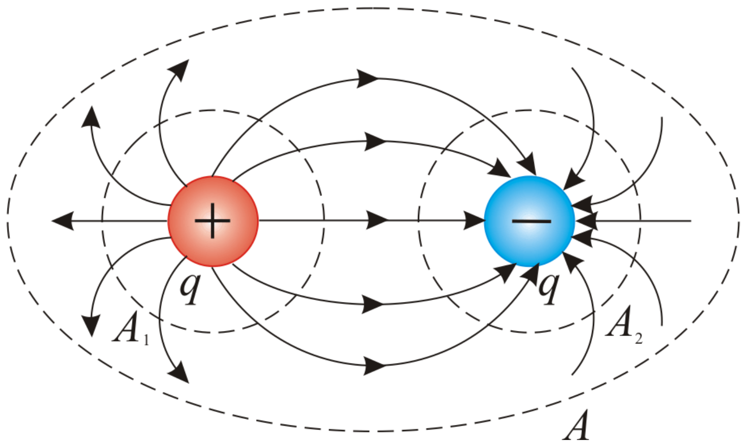
Полный поток вектора напряженности через любую площадку ***S*** :

$$\Phi_E = \int_S (\vec{E} d\vec{S})$$

Поток через замкнутую поверхность, окружающую заряд или заряженное тело :

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S})$$

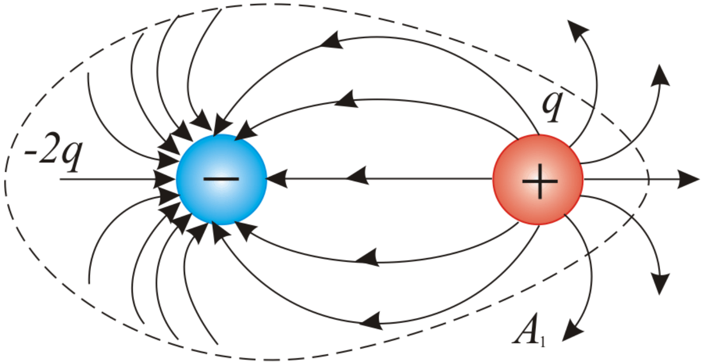
Поток вектора напряженности электрического поля



A_1: $\Phi_E > 0$

A_2: $\Phi_E < 0$

Общий поток через поверхность ***A*** равен нулю.



Поток не равен нулю, если суммарный заряд внутри поверхности не равен нулю.

Поток вектора напряженности зависит от заряда.

Теорема Остроградского – Гаусса

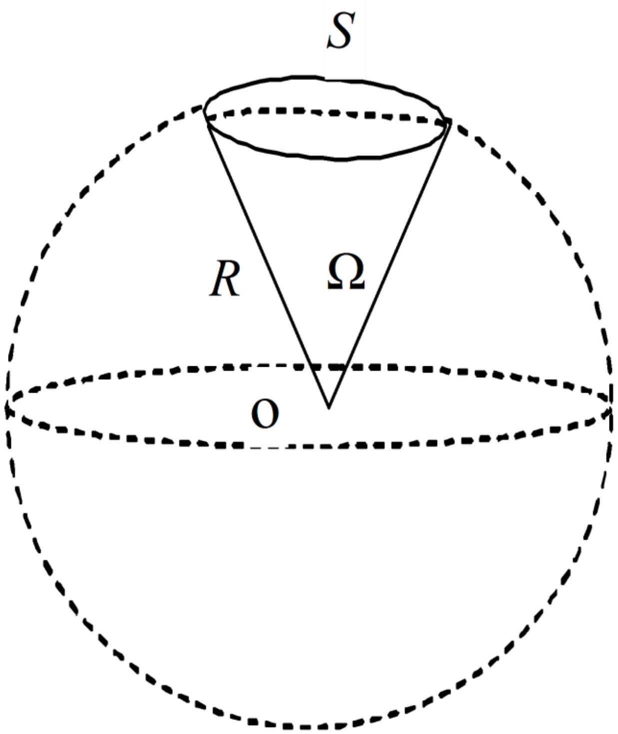
Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ε_0

$$\boxed{\Phi_E = \oint_s (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i}$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Док-во теоремы:

Телесный угол – часть пространства, ограниченная конической поверхностью.

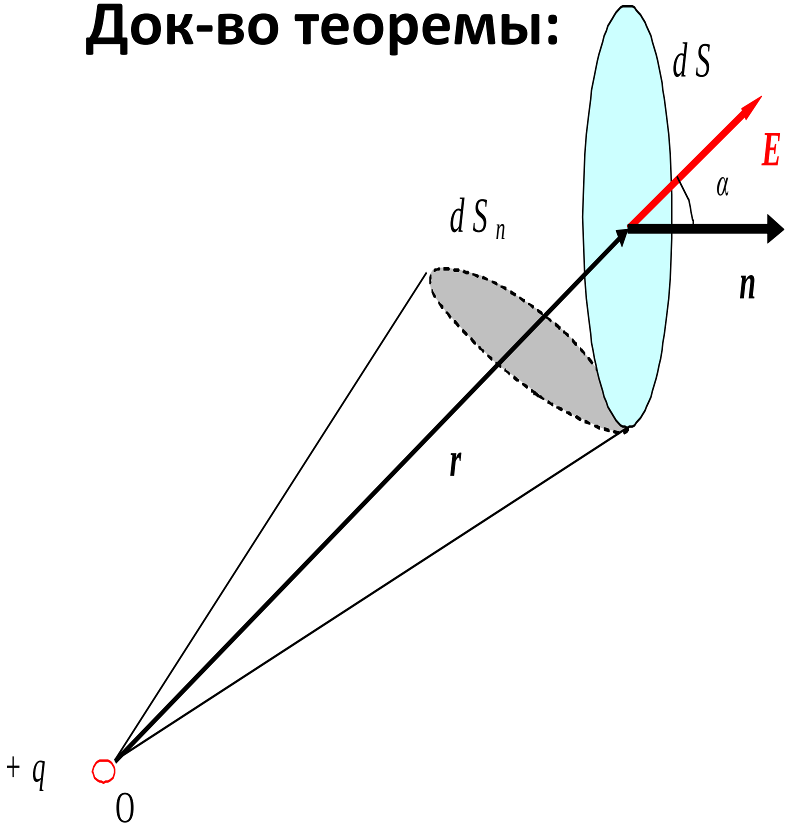


$$\Omega = \frac{S}{R^2} \qquad [\text{стерадиан}]$$

Мера телесного угла – отношение площади *S*, вырезаемой на поверхности сферы конической поверхностью к квадрату радиуса *R* сферы.

Теорема Остроградского – Гаусса

Док-во теоремы:



$$d\Phi_E = EdS\cos\alpha$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

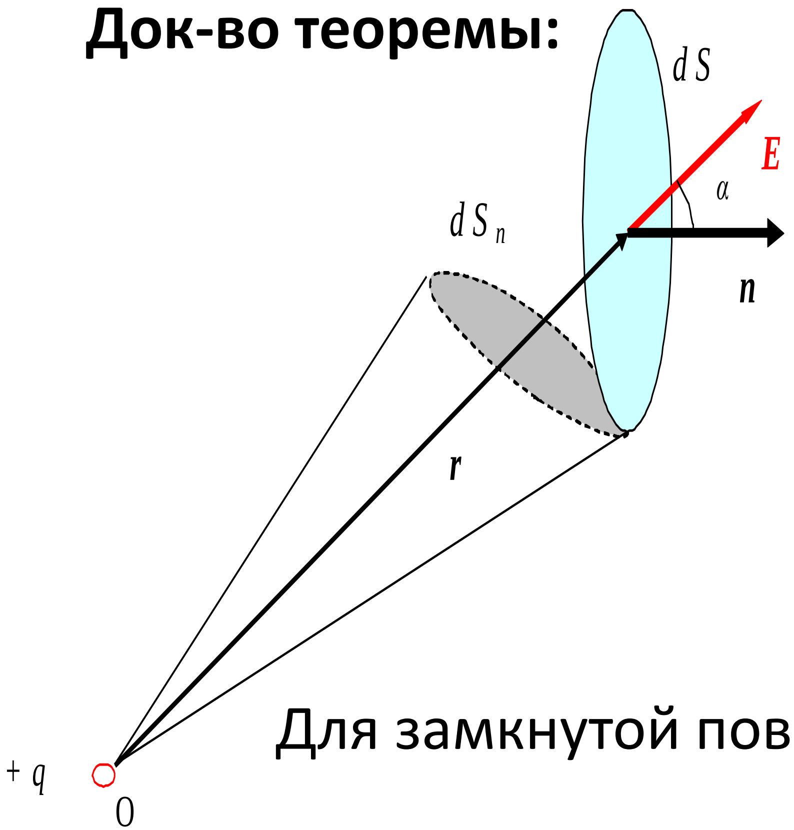
$$d\Phi_E = \frac{qdS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

dS_n – проекция площадки dS на плоскость перпендикулярную вектору r .

$$dS \cdot \cos\alpha = dS_n$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Док-во теоремы:



$$dS_n = r^2 \cdot d\Omega$$

$$d\Phi_E = \frac{q\,dS_n}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

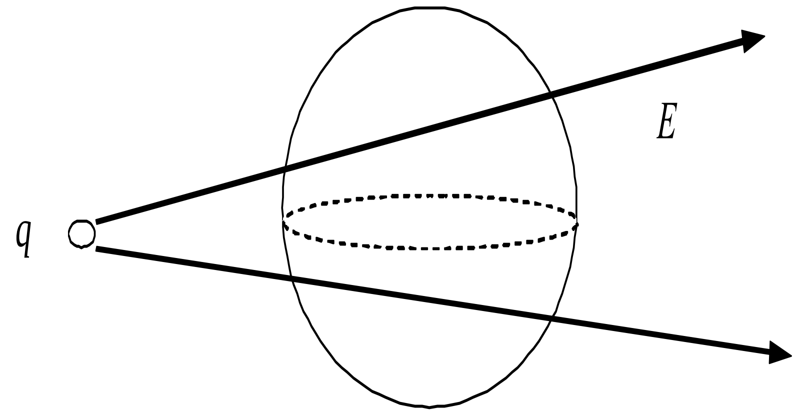
$$d\Phi_E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot d\Omega$$

Для замкнутой поверхности: $\oint d\Omega = 4\pi$

$$\boxed{\Phi_E = \oint_{4\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Теорема Остроградского – Гаусса

Поверхность не охватывает какой-либо заряд, то число силовых линий, входящих в поверхность, равно числу силовых линий выходящих из неё.



Суммарный поток Φ_E этого заряда равен нулю. $\Phi_E = 0.$

Теорема Остроградского – Гаусса

Если произвольная поверхность окружает ***k***– зарядов, то согласно принципу суперпозиции:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k$$

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \left(\sum_{i=1}^{k} E_{ni}\right) \cdot dS = \sum_{i=1}^{k} \oint_S E_{ni} dS = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

Теорема доказана!!!!

Теорема Гаусса в интегральной форме

Если внутри поверхности имеется каким-то образом распределенный заряд с объемной плотностью $\boldsymbol{\rho}$

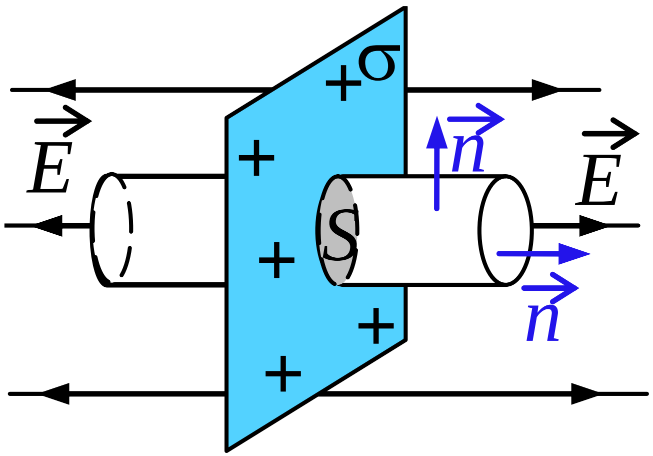
$\boldsymbol{\rho = dq/dV}$, Кл/м^3

то суммарный заряд, заключенный внутри поверхности площадью $\mathbf{S}$, охватывающей объем $\mathbf{V}$:

$$\sum_i q_i = \int_V \rho dV \qquad \Rightarrow \qquad \Phi_E = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости



$$\sigma = \frac{dq}{dS}$$

$$\oint_s E_n dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_i q_i$$

$$\oint_S E_n dS = \int_{S_{бок}} E_n dS_{бок} + 2\int_{S_{осн}} E_n dS_{осн} =$$

$$\int EdS_{бок} \cos 90^0 + 2\int EdS_{осн} \cos 0^0 = 2ES_{осн}$$

Применение теоремы Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости

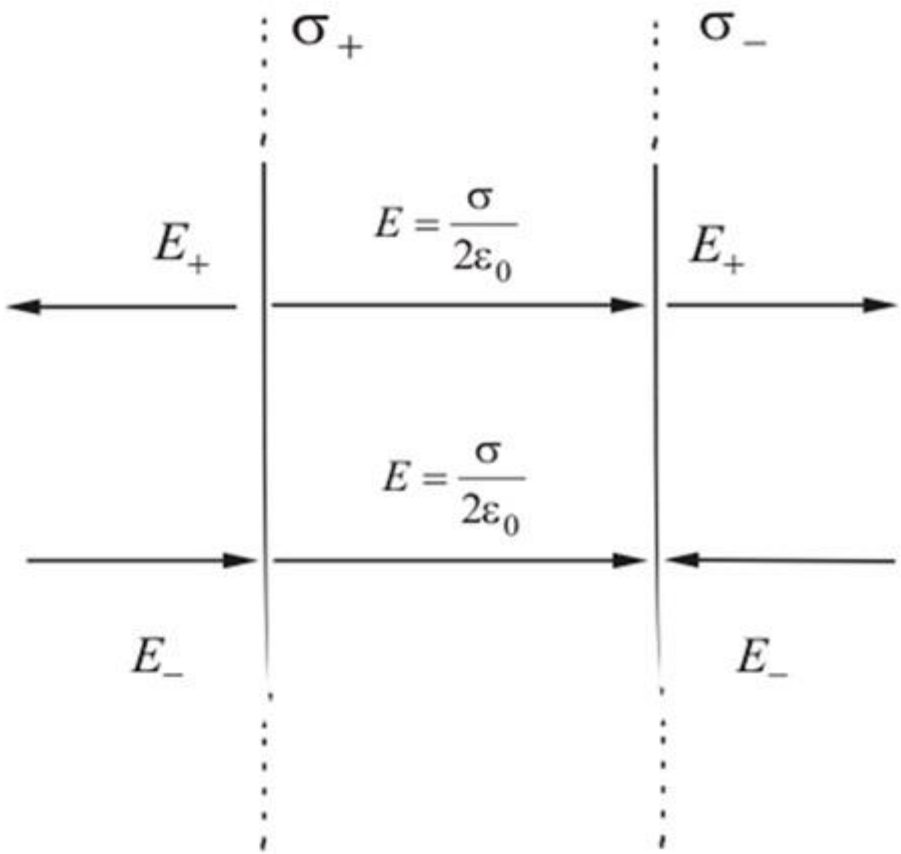
$$dq = \sigma dS, \quad \sum_{i=1}^{N} q_i = \int \sigma dS = \sigma S_{осн}.$$

$$2ES_{осн} = \frac{\sigma S_{осн}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

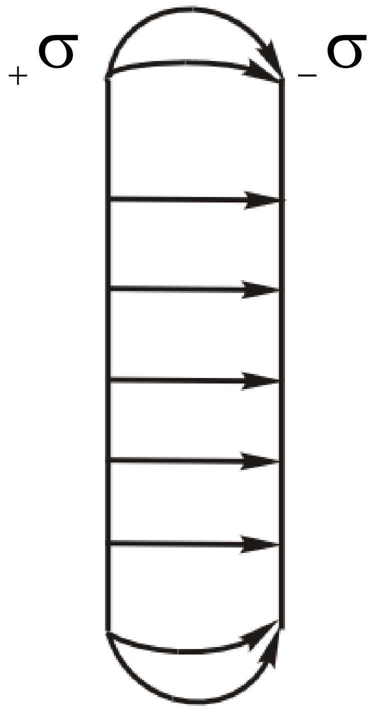
2. <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>



$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

Применение теоремы Гаусса

2. <u>Поле, образованное двумя разноименными заряженными плоскостями (бесконечно большими)</u>

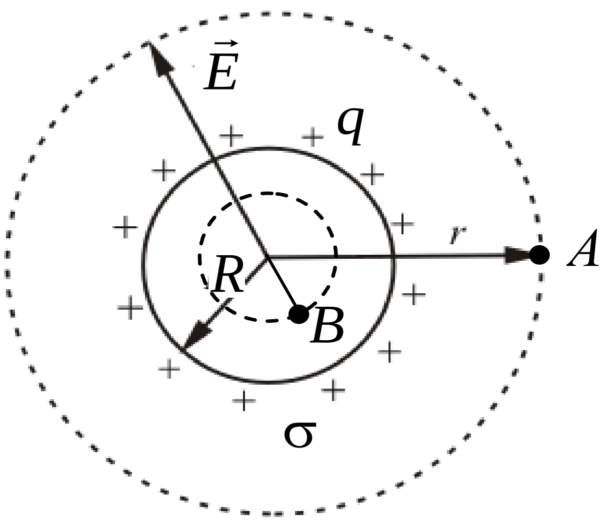


$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Применение теоремы Гаусса

3. Поле, образованное заряженной сферической поверхностью

В точке A $(r>R)$: $E(r)4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$



$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}}$$

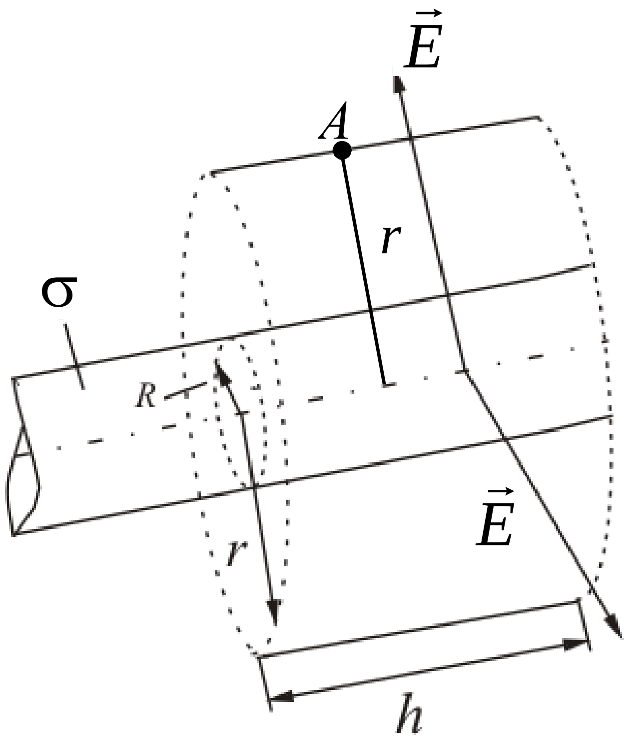
$$q = \sigma 4\pi R^2$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$$

В точке B напряженность будет равна нулю $(r<R)$.

Применение теоремы Гаусса

4. Поле, образованное бесконечно длинным заряженным цилиндром



В точке $A\ (r>R)$: $q=\sigma 2\pi Rh$

$$E(r)2\pi rh=\frac{q}{\varepsilon_0}$$

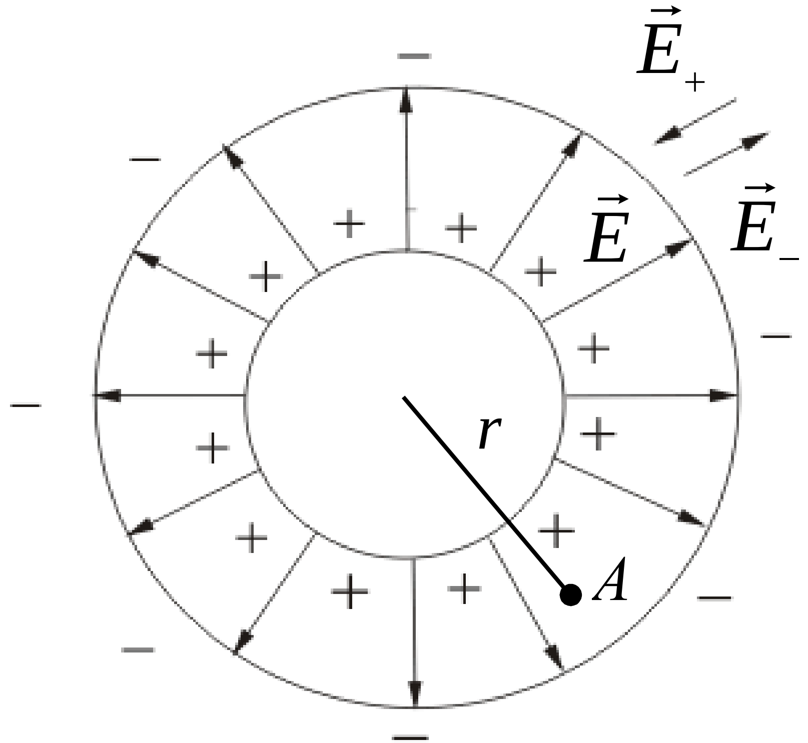
$$\boxed{E=\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}}$$

Если $(r<R)$: $q=0$

$$\boxed{E=0}$$

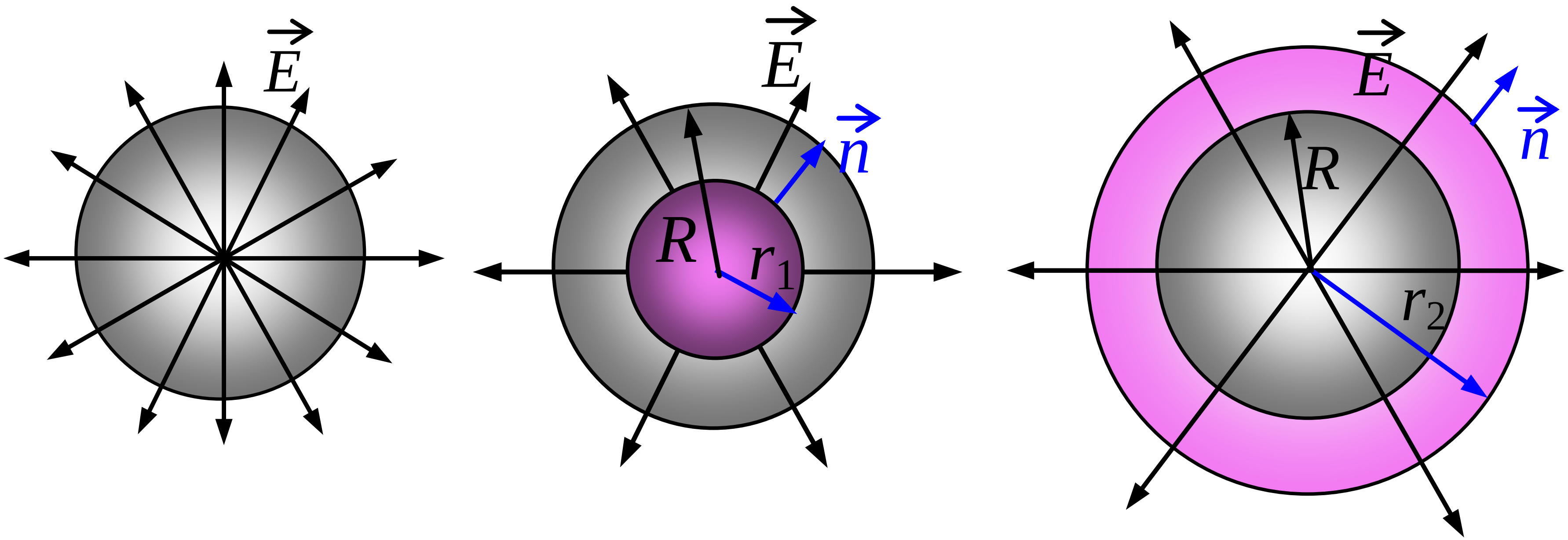
Применение теоремы Гаусса

<u>5. Поле, образованное двумя цилиндрическими поверхностями, заряженными одинаковыми разноименными зарядами</u>



Применение теоремы Гаусса

6. Поле объемного заряженного шара



Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Дивергенция

Дивергенцией вектора $\vec{A}$ (обозначается $div\vec{A}$) в какой-либо точке поля M называется, предел отношения потока вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S, охватывающую точку M , к объему ΔV части поля, ограниченной поверхностью S, при неограниченном уменьшении ΔV:

$$div\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \oint \left(\vec{A} d\vec{S} \right)$$

Дифференциальная форма теоремы Остроградского-Гаусса

Пусть заряд распределен в пространстве ΔV, с объемной плотностью $\langle\rho\rangle$. Тогда по теореме Остроградского – Гаусса:

$$\oint\left(\vec{E}d\vec{S}\right)=\frac{q}{\varepsilon_0} \text{ или } \oint\left(\vec{E}d\vec{S}\right)=\frac{\langle\rho\rangle\Delta V}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{1}{\Delta V}\oint\left(\vec{E}d\vec{S}\right)=\frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}$$

При $\Delta V\to 0;$ $\quad \frac{\langle\rho\rangle}{\varepsilon_0}\to\frac{\rho}{\varepsilon_0}$, а величина потока вектора напряженности

$$div\vec{E}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\oint\left(\vec{E}d\vec{S}\right)$$

$$\boxed{div\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

Дивергенция

Дивергенция является скалярной функцией координат.

$$div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Или через оператор Набла:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}, \qquad \vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

$$\boxed{\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.}$$

В тех точках поля, где $div\vec{E} > 0$ - положительные заряды (истоки)

$div\vec{E} < 0$ - отрицательные заряды (стоки).